

Kwantoren en predicaatlogica in de klas

Inhoud

1	Inleiding.....	1
2	Omzetten van uitspraken.....	2
2.1	Voorbeeld	2
2.2	Oefening.....	2
2.3	Oefening.....	2
3	Waarheidswaarde van uitspraken	3
3.1	Oefening.....	3
3.2	Oefening.....	4
3.3	Oefening.....	4
4	Logisch ware uitspraken	5
4.1	Oefening.....	5
4.2	Oefening.....	6
5	Referenties	6

1 Inleiding

In het leerplan Wiskunde B+S'' (III-WisS''-d) is bij LPD 4 over het beargumenteren van redeneringen en het bewijzen van wiskundige uitspraken een afbakening 'kwantoren' opgenomen. Een wenk bij dit leerplandoel: *"Kwantoren kunnen worden gebruikt in de formulering van een eigenschap of definitie (bv. limietbegrip). Je kan aandacht schenken aan de volgorde van kwantoren en de betekenis van de negatie van kwantoren."*

In het complementair leerplan Wiskunde (III-WiCo-d) is een deelrubriek 'Predicaatlogica' opgenomen met drie leerplandoelen.

- LPD 1 De leerlingen zetten uitspraken in woorden om in uitspraken in de taal van de predicaatlogica en omgekeerd.
- LPD 2 De leerlingen bepalen de waarheidswaarde van uitspraken van de predicaatlogica.
- LPD 3 De leerlingen gaan na of gegeven uitspraken logisch waar zijn en passen logisch ware uitspraken toe.

We geven inhoudelijke duiding en concrete voorbeelden bij deze leerinhouden. In het laatste deel gaan we via de logisch ware uitspraken in op de volgorde van kwantoren en op de negatie van kwantoren (zie de bovenstaande wenk).

2 Omzetten van uitspraken

In de taal van de predicaatlogica worden variabelen, predicaten (relaties met één of meerdere argumenten), connectieven ($\wedge, \vee, \neg, \Rightarrow, \Leftrightarrow$), kwantoren ($\forall$ en $\exists$) en het gelijkheidsteken gebruikt. Soms worden ook functies en constanten toegelaten. Deze taal is veel rijker dan de taal van de propositielogica: je kan er dus veel meer zaken mee uitdrukken.

2.1 Voorbeeld

We kunnen priemgetallen definiëren door gebruik te maken van predicaatlogica. Hiervoor nemen we de taal met:

- de natuurlijke getallen als verzameling waarover we werken (het ‘universum’);
- de relatie $P(\cdot)$ met één argument die staat voor ‘... is een priemgetal’;
- de relatie $R(\cdot, \cdot)$ met twee argumenten die staat voor ‘... is een deler van ...’;
- de letter x als variabele;
- het getal 1 als constante.

De volgende uitspraak is dan een definitie:

$$\forall x: (P(x) \Leftrightarrow \neg(x = 1) \wedge \forall y: (R(y, x) \Rightarrow y = x \vee y = 1)))$$

Er zijn regels voor de volgorde voor de connectieven, maar toch is het best om voldoende haakjes te gebruiken om zo de leesbaarheid te verhogen. In de wiskundige praktijk wordt het universum doorgaans genoteerd bij de kwantor (bv. $\forall x \in \mathbb{N}$) en worden relaties niet steeds genoteerd a.d.h.v. relatiesymbolen (bv. $x|y$ in plaats van $R(x, y)$).

2.2 Oefening

Zet de volgende uitspraken in woorden over gekleurde meetkundige figuren om in uitspraken in de predicaatlogica, gebruik makend van de predicaten *Driehoek*(.), *Vierhoek*(.), *Blauw*(.), *Rood*(.) en *GroterDan*(.,.) en van de (als constante beschouwde) figuur *a*.

- De figuur *a* is een rode vierhoek of een blauwe driehoek.
- Als de figuur *a* geen driehoek is, dan is hij rood.
- Elke driehoek is groter dan de figuur *a*.
- Sommige rode vierhoeken zijn groter dan de figuur *a*.

Oplossing:

- $(Rood(a) \wedge Vierhoek(a)) \vee (Blauw(a) \wedge Driehoek(a))$
- $\neg Driehoek(a) \Rightarrow Rood(a)$
- $\forall x: (Driehoek(x) \Rightarrow GroterDan(x, a))$
- $\exists x: (Rood(x) \wedge Vierhoek(x) \wedge Groterdan(x, a))$

2.3 Oefening

Zet de volgende uitspraken in woorden om in uitspraken in de predicaatlogica, gebruik makend van de predicaten *Mens*(.), *Hond*(.) en *HoudenVan*(.,.).

- Alle mensen houden van alle honden.
- Er is een mens die houdt van een hond.
- Er is een mens die houdt van alle honden.
- Er is een hond waarvan alle mensen houden.

Oplossing:

- a) $\forall x \forall y: (Mens(x) \wedge Hond(y)) \Rightarrow HoudenVan(x, y)$
- b) $\exists x \exists y: Mens(x) \wedge Hond(y) \wedge HoudenVan(x, y)$
- c) $\exists x: Mens(x) \wedge (\forall y: Hond(y) \Rightarrow HoudenVan(x, y))$
- d) $\exists y: Hond(y) \wedge (\forall x: Mens(x) \Rightarrow HoudenVan(x, y))$

3 Waarheidswaarde van uitspraken

Om de waarheidswaarde van een uitspraak in de predicaatenlogica te bepalen moeten we weten over welke verzameling er gewerkt wordt (het 'universum') en waarvoor de predicaaten/relatiesymbolen staan. Doorgaans is het universum en de interpretatie van de predicaaten duidelijk vanuit de context. Als er vrije variabelen (variabelen die niet gebonden zijn door kwantoren) of constanten voorkomen in de uitspraak, dan moeten die ook een waarde krijgen.

Voorbeeld: om de waarheidswaarde van de uitspraak $\forall x: R(x, y)$ te bepalen moeten we weten:

- ✓ in welke verzameling de variabele x leeft;
- ✓ wat de betekenis is van de relatie $R(.,.)$;
- ✓ wat de waarde is van de variabele y .

3.1 Oefening

We beschouwen een predicaatenlogica taal met één predicaat R met twee argumenten.

- Interpretatie 1: universum = $\mathbb{N}$, $R(.,.)$ = relatie ' $\dots < \dots$ '
- Interpretatie 2: universum = $\mathbb{Z}$, $R(.,.)$ = relatie ' $\dots < \dots$ '
- Interpretatie 3: universum = $\mathbb{N}$, $R(.,.)$ = relatie ' $\dots$ is een deler van $\dots$ '
- Interpretatie 4: universum = $\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$, $R(.,.)$ = relatie ' $\dots$ is een deler van $\dots$ '

Wat is voor elk van bovenstaande interpretaties de waarheidswaarde van de volgende uitspraken?

- a) $\forall x \forall y: R(x, y) \vee R(y, x)$
- b) $\forall x \exists y: R(x, y)$
- c) $\forall y \exists x: R(x, y)$
- d) $\exists x \forall y: R(x, y)$
- e) $\exists y \forall x: R(x, y)$

Oplossing:

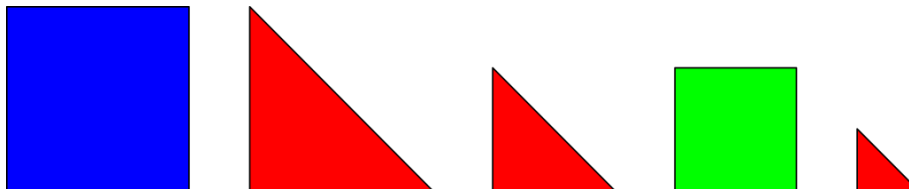
	Interpretatie 1	Interpretatie 2	Interpretatie 3	Interpretatie 4
Uitspraak a	Vals	Vals	Vals	Vals
Uitspraak b	Waar	Waar	Waar	Waar
Uitspraak c	Vals	Waar	Waar	Waar
Uitspraak d	Vals	Vals	Waar	Waar
Uitspraak e	Vals	Vals	Vals	Waar

Bijvraag: kan je voor de relatie $R(.,.)$ = relatie ' $\dots$ is een deler van $\dots$ ' een universum vinden waarvoor alle uitspraken waar zijn? Kan zo'n universum 100 elementen tellen?

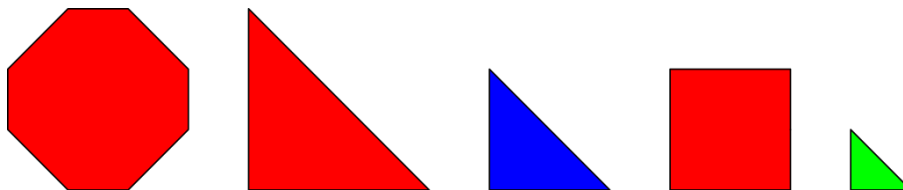
3.2 Oefening

We beschouwen de predicaatenlogicaal met predicaaten $Driehoek(.)$, $Vierhoek(.)$, $Blauw(.)$, $Rood(.)$ en $GroterDan(.,.)$. We geven hieronder twee verschillende universums bestaande uit gekleurde meetkundige figuren van verschillende groottes (groot, medium, klein).

Universum 1:



Universum 2:



Wat is voor elk van bovenstaande universums de waarheidswaarde van de volgende uitspraken?

- $\forall x: (Driehoek(x) \vee Rood(x))$
- $\forall x: (Driehoek(x) \Rightarrow Rood(x))$
- $(\forall x: Driehoek(x)) \Rightarrow (\forall x: Rood(x))$
- $\exists x: (Driehoek(x) \wedge Blauw(x))$
- $(\exists x: Driehoek(x)) \wedge (\exists x: Blauw(x))$
- $\forall x \forall y: (Driehoek(x) \vee Blauw(y) \vee GroterDan(x, y))$
- $\exists x \exists y: (Driehoek(x) \wedge Blauw(y) \wedge GroterDan(x, y))$
- $\exists x: (Driehoek(x) \wedge \forall y: (Vierhoek(y) \Rightarrow GroterDan(x, y)))$
- $\forall x: (Driehoek(x) \vee \exists y: (Driehoek(y) \wedge GroterDan(x, y)))$

Oplossing:

	Universum 1	Universum 2
Uitspraak a	Vals	Waar
Uitspraak b	Waar	Vals
Uitspraak c	Waar	Waar
Uitspraak d	Vals	Waar
Uitspraak e	Waar	Waar
Uitspraak f	Vals	Vals
Uitspraak g	Vals	Waar
Uitspraak h	Vals	Waar
Uitspraak i	Vals	Waar

3.3 Oefening

We beschouwen een predicaatenlogicaal met één predicaat R met twee argumenten. Zoek voor het universum $\mathbb{N}$ een interpretatie voor het predicaat R zodat de uitspraak waar is en een interpretatie waarvoor de uitspraak vals is.

- $\forall x: R(x, x)$
- $\forall x \forall y: R(x, y) \Rightarrow R(y, x)$

- c) $\forall x \forall y: (R(x, y) \wedge R(y, x)) \Rightarrow y = x$
d) $\forall x \forall y \forall z: (R(x, y) \wedge R(y, z)) \Rightarrow R(x, z)$

Mogelijke oplossing:

	Interpretatie voor ware uitspraak	Interpretatie voor valse uitspraak
Uitspraak a	... is gelijk aan $\leq$ is een deler van ...	... < is één groter dan ...
Uitspraak b	... is gelijk aan heeft dezelfde pariteit als ...	... < $\leq$ een deler van is één groter dan ...
Uitspraak c	... $\leq$ is een deler van ...	... heeft dezelfde pariteit als ...
Uitspraak d	... < $\leq$ is een deler van heeft dezelfde pariteit als ...	... is één groter dan ...

4 Logisch ware uitspraken

Zoals we in de oefeningen uit deel 3 gezien hebben, hangt de waarheidswaarde van veel uitspraken af van de interpretatie. Zo is de uitspraak $\forall x \exists y: R(x, y)$ waar in sommige gevallen en vals in andere gevallen. Logisch ware uitspraken zijn uitspraken die waar zijn voor elke interpretatie.

Voorbeelden van logisch ware uitspraken:

- Verwisselen van kwantoren:
 - $\exists x \exists y: R(x, y) \Leftrightarrow \exists y \exists x: R(x, y)$
 - $\forall x \forall y: R(x, y) \Leftrightarrow \forall y \forall x: R(x, y)$
 - $\exists x \forall y: R(x, y) \Rightarrow \forall y \exists x: R(x, y)$
- Negatie van kwantoren:
 - $\neg(\forall x: S(x)) \Leftrightarrow \exists x: \neg S(x)$
 - $\neg(\exists x: S(x)) \Leftrightarrow \forall x: \neg S(x)$
- Kwantoren en connectieven:
 - $\forall x: (S(x) \wedge T(x)) \Leftrightarrow \forall x: S(x) \wedge \forall x: T(x)$
 - $\forall x: S(x) \vee \forall x: T(x) \Rightarrow \forall x: (S(x) \vee T(x))$
 - $\exists x: (S(x) \wedge T(x)) \Rightarrow \exists x: S(x) \wedge \exists x: T(x)$
 - $\exists x: (S(x) \vee T(x)) \Leftrightarrow \exists x: S(x) \vee \exists x: T(x)$

Je kan leerlingen laten onderzoeken welke kwantoren verwisseld mogen worden en een tegenvoorbeeld laten zoeken voor het geval waarbij de kwantoren niet verwisseld mogen worden. Ook bij de twee gevallen waarbij er een implicatie staat en geen equivalentie bij de uitspraken onder 'kwantoren en connectieven' kunnen tegenvoorbeelden worden gegeven.

Voorbeeld: voor het universum $\mathbb{N}$ en de relatie $S(\cdot)$ en $T(\cdot)$ die staan voor resp. '... is even' en '... is oneven' is de uitspraak $(\exists x: S(x) \wedge \exists x: T(x)) \Rightarrow \exists x: (S(x) \wedge T(x))$ vals.

4.1 Oefening

Door gebruik te maken van de negatiestellingen en van bepaalde tautologieën uit de propositielogica kunnen we negaties van uitspraken herschrijven. Ga na dat de volgende beweringen correct zijn.

- a) De negatie van $\forall x \forall y: R(x, y)$ is equivalent met $\exists x \exists y: \neg R(x, y)$.
- b) De negatie van $\forall x: S(x) \wedge T(x)$ is equivalent met $\exists x: \neg S(x) \vee \neg T(x)$.
- c) De negatie van $\forall x: S(x) \vee T(x)$ is equivalent met $\exists x: \neg S(x) \wedge \neg T(x)$.
- d) De negatie van $\forall x: S(x) \Rightarrow T(x)$ is equivalent met $\exists x: S(x) \wedge \neg T(x)$.

In bovenstaande beweringen worden de volgende tautologieën gebruikt:

- wetten van De Morgan: $\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$ en $\neg(p \vee q) \Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$;
- negatie van implicatie: $\neg(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (p \wedge \neg q)$.

4.2 Oefening

Ga na of de volgende uitspraken logisch waar zijn. Geef een tegenvoorbeeld in het geval dat de uitspraak niet logisch waar is.

- a) $\forall x: (S(x) \Rightarrow T(x)) \Rightarrow ((\exists x: S(x)) \Rightarrow (\exists x: T(x)))$
- b) $((\exists x: S(x)) \Rightarrow (\exists x: T(x))) \Rightarrow \forall x: (S(x) \Rightarrow T(x))$
- c) $\exists x: (S(x) \Rightarrow T(x)) \Leftrightarrow ((\forall x: S(x)) \Rightarrow (\exists x: T(x)))$

Oplossing:

- a) Deze uitspraak is logisch waar.

Bewijs: beschouw een universum U en relaties S en T op U . Stel dat de uitspraak $\forall x: (S(x) \Rightarrow T(x))$ waar is voor die interpretatie (*).

Voldoende te bewijzen: de uitspraak $(\exists x: S(x)) \Rightarrow (\exists x: T(x))$ is waar voor de gekozen interpretatie.

Veronderstel dus bovendien dat $\exists x: S(x)$ waar is (**).

Voldoende te bewijzen: de uitspraak $\exists x: T(x)$ is waar voor de gekozen interpretatie.

Uit het gegeven (**) volgt dat er een $a \in U$ bestaat zodat $S(a)$ waar is. Uit (*) volgt dat ook $S(a) \Rightarrow T(a)$ waar is. Bijgevolg is $T(a)$ waar, waaruit we mogen besluiten dat $\exists x: T(x)$ waar is. QED

- b) Deze uitspraak is niet logisch waar.

Tegenvoorbeeld: universum = $\mathbb{N}$, $S(\cdot)$ = relatie '... is even' en $T(\cdot)$ = relatie '... is oneven'.

- c) Deze uitspraak is logisch waar.

Bewijs: we tonen dit aan m.b.v. een opeenvolging van logisch equivalente uitspraken.

$$\begin{aligned}
 & \exists x: (S(x) \Rightarrow T(x)) \\
 & \Leftrightarrow \exists x: (\neg S(x) \vee T(x)) \\
 & \Leftrightarrow (\exists x: \neg S(x)) \vee (\exists x: T(x)) \\
 & \Leftrightarrow \neg(\forall x: S(x)) \vee (\exists x: T(x)) \\
 & \Leftrightarrow ((\forall x: S(x)) \Rightarrow (\exists x: T(x))).
 \end{aligned}$$

We maken hierbij gebruik van de logisch ware uitspraken uit het begin van deel 4 en van de tautologie $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg p \vee q)$.

5 Referenties

- [First-order logic - Wikipedia](#)
- [LogicPalet Home](#) : uitgebreide app om concepten uit de predicaatenlogica in te oefenen.
Opmerking: de structuur GeoWorld van LogicPalet gebruikt figuren op een schaakbord; oefening 3.2 geeft aanleiding tot een vereenvoudigde versie.