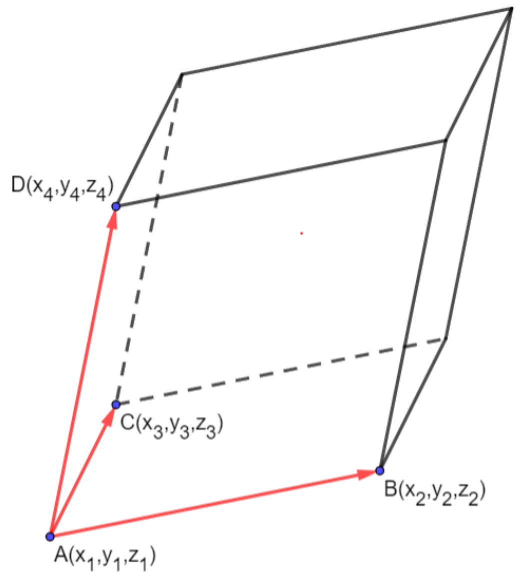
Dienst Curriculum & vorming
Team secundair onderwijs
Guimardstraat 1 - 1040 BRUSSEL
www.katholiekonderwijs.vlaanderen

**Toepassingen op determinanten in de meetkunde - Bijlage 2**
**Het volume van een paralellepidum**
**2024-09-01**

# 1 Het berekenen van het volume van een parallellepipedum met determinanten

Het volume V van het parallellepipedum opgespannen door $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ en $\overrightarrow{AD}$ met $A(x_1,y_1,z_1)$, $B(x_2,y_2,z_2)$, $C(x_3,y_3,z_3)$ en $D(x_4,y_4,z_4)$ kan met onderstaande formule worden berekend.

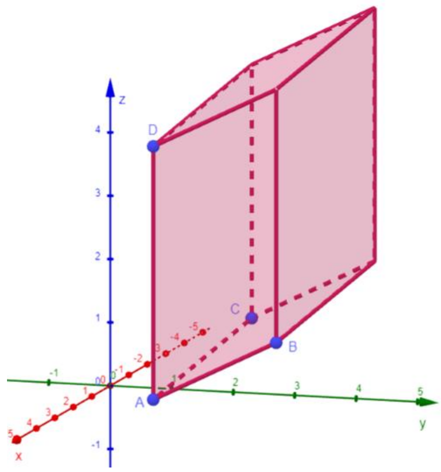
$$V = \pm\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \\ x_4-x_1 & y_4-y_1 & z_4-z_1 \end{vmatrix}$$




De rijen van de determinant zijn de coördinaten van $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ en $\overrightarrow{AD}$. Het teken hangt af van het teken van de determinant. Een volume is immers steeds positief.

Voorbeeld: *'Bereken het volume V van het parallellepipedum opgespannen door $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ en $\overrightarrow{AD}$ met A(1,1,0), B(1,3,1), C(-1,2,1) en D(1,1,4).'*

- $\overrightarrow{AB}(0,2,1)$, $\overrightarrow{AC}(-2,1,1)$ en $\overrightarrow{AD}(0,0,4)$
- $\begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 0+0+4.\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 4.4 = 16$
- $V = 16$

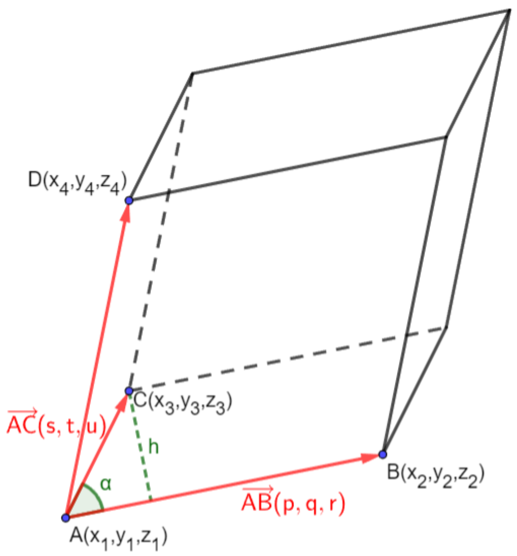


## 2 Bewijs van de formule voor het volume van een parallepipedum

- **Oppervlakte van het grondvlak (= $A_g$)**

Stel: $co(\overrightarrow{AB}) = (p, q, r)$ en $co(\overrightarrow{AC}) = (s, t, u)$

We berekenen eerst $\sin\alpha$ en $\cos\alpha$.




- $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \|\overrightarrow{AB}\|.\|\overrightarrow{AC}\|.\cos\alpha$

$$\Rightarrow \cos\alpha = \frac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}{\|\overrightarrow{AB}\|.\|\overrightarrow{AC}\|}$$

- $\sin\alpha = \dfrac{h}{|AC|} \Rightarrow h = \|\overrightarrow{AC}\|.\sin\alpha \qquad (1)$

Uit (1) volgt: $A_g = |AB|.h = \|\overrightarrow{AB}\|.\|\overrightarrow{AC}\|.\sin\alpha$

Om de hoek $\alpha$ met behulp van de grondformule van de goniometrie te elimineren, berekenen we het kwadraat van de oppervlakte van het grondvlak.

$$\begin{aligned}
A_g^2 &= \|\overrightarrow{AB}\|^2.\|\overrightarrow{AC}\|^2.\sin^2\alpha \\
&= \|\overrightarrow{AB}\|^2.\|\overrightarrow{AC}\|^2.\left(1-\cos^2\alpha\right) \\
&= \|\overrightarrow{AB}\|^2.\|\overrightarrow{AC}\|^2.\left(1-\frac{\left(\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}\right)^2}{\|\overrightarrow{AB}\|^2.\|\overrightarrow{AC}\|^2}\right) \\
&= \|\overrightarrow{AB}\|^2.\|\overrightarrow{AC}\|^2 - \left(\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}\right)^2 \\
&= (p^2+q^2+r^2)(s^2+t^2+u^2) - (ps+qt+ru)^2 \\
&= \cancel{p^2s^2} + p^2t^2 + p^2u^2 + q^2s^2 + \cancel{q^2t^2} + q^2u^2 + r^2s^2 + r^2t^2 + \cancel{r^2u^2} - \cancel{p^2s^2} - \cancel{q^2t^2} - \cancel{r^2u^2} - 2psqt - 2psru - 2qtru \\
&= p^2t^2 + p^2u^2 + q^2s^2 + q^2u^2 + r^2s^2 + r^2t^2 - 2psqt - 2psru - 2qtru \\
&= (pt-sq)^2 + (pu-rs)^2 + (qu-rt)^2
\end{aligned}$$

- **Volume van het parallellepidum (=V)**

We stellen een cartesische vergelijking van het vlak ABC op.

$$Vl(ABC) \leftrightarrow \begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ p & q & r \\ s & t & u \end{vmatrix} = 0$$

Door te steunen op de formule $d(P,\alpha) = \dfrac{|u_1.x_1 + v_1.y_1 + w_1.z_1 + t_1|}{\sqrt{u_1^2 + v_1^2 + w_1^2}}$ met $P(x_1, y_1, z_1)$ en

$\alpha \leftrightarrow u_1.x + v_1.y + w_1.z + t_1 = 0$ kunnen we volume van het parallellepipedum berekenen.

$$V = A_g.d\big(D, Vl(ABC)\big)$$

$$= \sqrt{(pt-sq)^2+(pu-rs)^2+(qu-rt)^2}\,.\,\frac{\pm\begin{vmatrix} x_4-x_1 & y_4-y_1 & z_4-z_1 \\ p & q & r \\ s & t & u \end{vmatrix}}{\sqrt{(qu-rt)^2+(pu-rs)^2+(pt-sq)^2}}$$

$$= \pm\begin{vmatrix} x_4-x_1 & y_4-y_1 & z_4-z_1 \\ p & q & r \\ s & t & u \end{vmatrix}$$

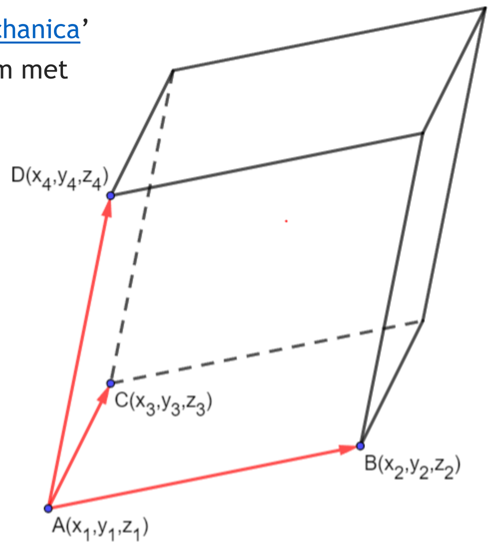
Door p, q, r, s, t en u te vervangen door hun waarde en na het omwisselen van enkele rijen bekomen we:

$$V = \pm\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \\ x_4-x_1 & y_4-y_1 & z_4-z_1 \end{vmatrix}$$

## 3 Bewijs m.b.v. het vectorieel product

In het document '[Toepassingen op determinanten in de mechanica](https://)' wordt aangetoond dat het volume van een parallellepipedum met volgende formule kan worden berekend.

$$V = \left|\overrightarrow{AD}.(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC})\right| \qquad (1)$$




Hierbij is $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ het vectorieel product van $\overrightarrow{AB}$ met $\overrightarrow{AC}$.

Deze vectoren hebben volgende coördinaten:

- $co\left(\overrightarrow{AB}\right) = (x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1)$
- $co\left(\overrightarrow{AC}\right) = (x_3-x_1, y_3-y_1, z_3-z_1)$
- $co\left(\overrightarrow{AD}\right) = (x_4-x_1, y_4-y_1, z_4-z_1)$
- $co\left(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right) = \left(\begin{vmatrix} y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} x_2-x_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 \end{vmatrix}\right)$

We berekenen $\overrightarrow{AD}.(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC})$ :

$$\overrightarrow{AD}.(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) = (x_4-x_1).\begin{vmatrix} y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} - (y_4-y_1).\begin{vmatrix} x_2-x_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} + (z_4-z_1).\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 \end{vmatrix}$$

We ontwikkelen nu $\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \\ x_4-x_1 & y_4-y_1 & z_4-z_1 \end{vmatrix}$ naar de laatste rij. We bekomen:

$$\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \\ x_4-x_1 & y_4-y_1 & z_4-z_1 \end{vmatrix} = (x_4-x_1).\begin{vmatrix} y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} - (y_4-y_1).\begin{vmatrix} x_2-x_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} + (z_4-z_1).\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 \end{vmatrix}$$

We besluiten:

$$\overrightarrow{AD}.(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \\ x_4 - x_1 & y_4 - y_1 & z_4 - z_1 \end{vmatrix} \qquad (2)$$

Uit (1) en (2) volgt:

$$V = \pm \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \\ x_4 - x_1 & y_4 - y_1 & z_4 - z_1 \end{vmatrix}$$