Netwerkdagen Wiskunde
Tweede en derde graad DA- en D-finaliteit

Probleemoplossend denken en wiskundig redeneren

2026-04-01

Inhoud

Vooraf

Tijdens de schooljaren 2024–2025 en 2025–2026 organiseerden we verschillende netwerkdagen wiskunde voor leraren van de tweede en derde graad in de DA- en D-finaliteit. Deze netwerkdagen stonden volledig in het teken van probleemoplossend denken en wiskundig redeneren.

Dit document is een bundeling van alle wiskundige problemen die op deze netwerken aan bod kwamen.

Waar zinvol, bevat elke opgave:

- Context / probleemstelling
- Mogelijke probleemaanpak en heuristieken
- Oplossing
- Mogelijke differentiatie

Al deze problemen zijn een combinatie van eigen inspiratie, posts uit wiskundegroepen op sociale media en opgaven uit verschillende wiskundewedstrijden. Alle opgaven zijn geselecteerd en mogelijks aangepast met aandacht voor didactische meerwaarde, differentiatie en het versterken van wiskundige denkstrategieën.

De Pedagogische Begeleiding Wiskunde SO

Enkele problemen met probleemaanpak, heuristieken en differentiatie

DEEL 1 GETALLENLEER

1 n-de machtswortels

Gegeven:

- $m, n, p \in \mathbb{N}_0 \setminus \{1\}$
- $m + n + p = \dfrac{m.n.p}{4}$

Gevraagd:

Bereken $\dfrac{\sqrt[m]{16^{n+p}} + \sqrt[n]{16^{m+p}} + \sqrt[p]{16^{m+n}}}{2^{n.p} + 2^{m.p} + 2^{m.n}}$.

(Antwoord: 1/16)

Mogelijke probleemaanpak / heuristieken

- Rekenen met machten met rationale getallen

Oplossing

$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt[m]{16^{n+p}} + \sqrt[n]{16^{m+p}} + \sqrt[p]{16^{m+n}}}{2^{n.p} + 2^{m.p} + 2^{m.n}} &= \frac{\sqrt[m]{2^{4n+4p}} + \sqrt[n]{2^{4m+4p}} + \sqrt[p]{2^{4m+4n}}}{2^{n.p} + 2^{m.p} + 2^{m.n}} \\
&= \frac{\sqrt[m]{2^{m.n.p-4m}} + \sqrt[n]{2^{m.n.p-4n}} + \sqrt[p]{2^{m.n.p-4p}}}{2^{n.p} + 2^{m.p} + 2^{m.n}} \\
&= \frac{2^{n.p-4} + 2^{m.p-4} + 2^{m.n-4}}{2^{n.p} + 2^{m.p} + 2^{m.n}} \\
&= \frac{2^{-4}.(2^{n.p} + 2^{m.p} + 2^{m.n})}{2^{n.p} + 2^{m.p} + 2^{m.n}} \\
&= \frac{1}{16}
\end{aligned}$$

2 Rekenen met machten

Bereken $\dfrac{\left(4^{100} + 2^{150}\right)\left(4^{100} - 2^{150}\right)}{2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{100}}$.

(Antwoord: 2^{299})

Mogelijke probleemaanpak / heuristieken

- Som van de eerste n termen van een meetkundige rij
- Herkennen van merkwaardige producten

Oplossing

$$\frac{\left(4^{100}+2^{150}\right)\left(4^{100}-2^{150}\right)}{2+2^2+2^3+\ldots+2^{100}}=\frac{4^{200}-2^{300}}{2.\frac{2^{100}-1}{2-1}}$$

$$=\frac{2^{400}-2^{300}}{2.(2^{100}-1)}$$

$$=\frac{2^{300}.(2^{100}-1)}{2.(2^{100}-1)}$$

$$=2^{299}$$

3 Vergelijkingen met faculteiten

Los de vergelijking $(n+1)!=n!+120n$ met $n\in\mathbb{N}$ op.

(Antwoord: n = 0 of n = 5)

Mogelijke probleemaanpak / heuristieken

- Rekenen met faculteiten

Oplossing

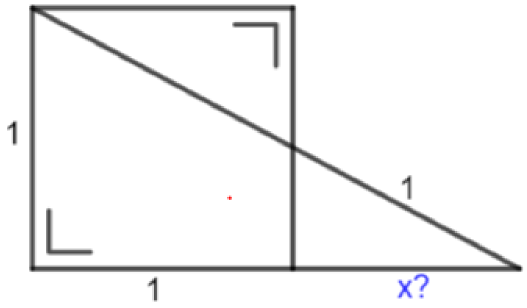
$$\begin{aligned}(n+1)!=n!+120n \quad &\Leftrightarrow \quad (n+1)!-n!=120n\\ &\Leftrightarrow \quad (n+1).n!-n!=120n\\ &\Leftrightarrow \quad n.n!-120n=0\\ &\Leftrightarrow \quad n.(n!-120)=0\\ &\Leftrightarrow \quad n=0 \vee n!=120\\ &\Leftrightarrow \quad n=0 \vee n=5\end{aligned}$$

Mogelijke differentiatie

- Eenvoudig: Je kan een uitdrukking met faculteiten laten vereenvoudigen.
    - Vb. Vereenvoudig $\frac{82!}{81!+80!}$.

DEEL 2 MEETKUNDE – ALGEMEEN

4 Afstand in een driehoek



Bereken x.

(Antwoord: x ≈ 0,883)

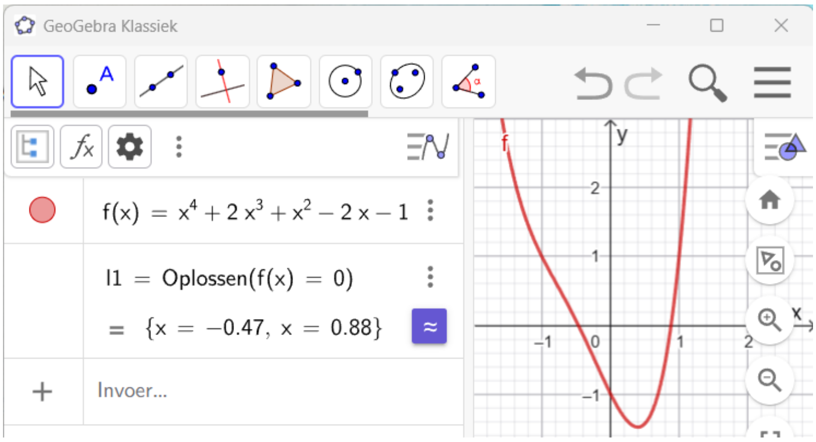
Mogelijke probleemaanpak / heuristieken

- Herkennen van gelijkvormige driehoeken
- Toepassen van de stelling van Pythagoras
- Oplossen van een algebraïsche vergelijking met ICT

Oplossing

Door gebruik te maken van de stelling van Pythagoras en uit te drukken dat de zijden van gelijkvormige driehoeken evenredig zijn, vinden we de vergelijking $x^4 + 2x^3 + x^2 - 2x - 1 = 0$.

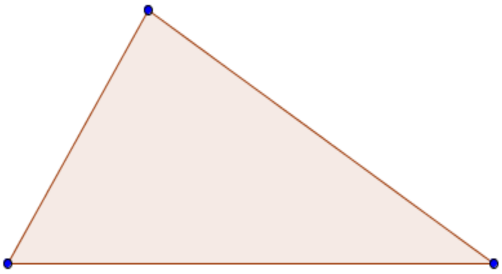
Deze vergelijking lossen we met ICT op.



De enige positieve reële oplossing is 0,883. Dit is dus de gezochte x-waarde.

5 Constructieopdracht (1)

Construeer in onderstaande driehoek een ruit waarvan 2 zijden op de zijden van de driehoek liggen en het vierde hoekpunt op de derde zijde van de driehoek.

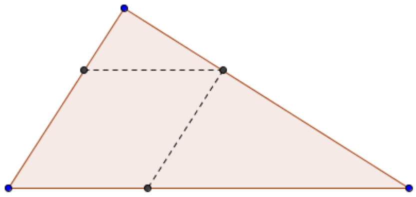


Mogelijke probleemaanpak / heuristieken

Exploratiefase (het probleem begrijpen)

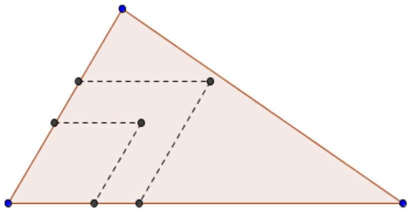
Heuristische methode:

- *Maak een schets.*
- *Stel het probleem voor als opgelost.*



Analyseer de figuur:

- *Laat (tijdelijk) één van de voorwaarden vallen (heuristische methode).*
- *Construeer ruiten waarbij het vierde hoekpunt niet op de derde zijde van de driehoek ligt.*



Mathematisering (Plan van aanpak)

Tussen deze ruiten en de oplossing bestaat een verband. Alle ruiten hebben dezelfde diagonaal, nl. de deellijn van de hoek.

Uitwerking – constructie:

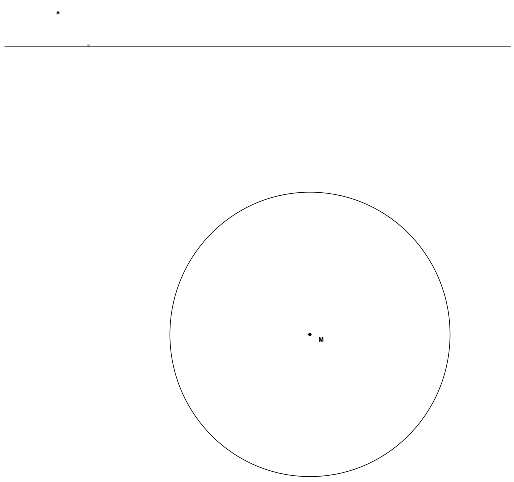
Constructie uitvoeren (nieuwe tekening)

Reflectie

- *Zijn er meerdere oplossingen?*
- *Is er altijd een oplossing?*

6 Constructieopdracht (2)

Bepaal op de rechte a een punt P waaruit men aan de cirkel C met middelpunt M en straal 4 cm een raaklijn kan tekenen die 7 cm lang is.



<u>Exploratiefase (het probleem begrijpen)</u>

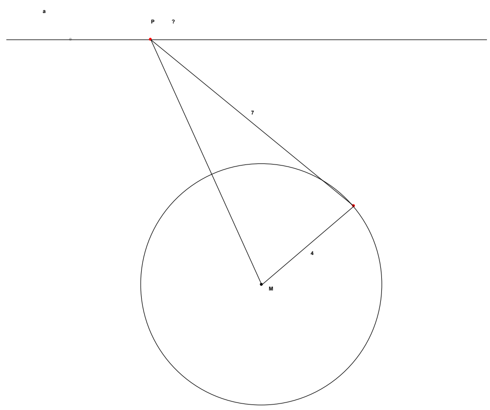
Heuristische methode:

- *Maak een schets.*
- *Stel het probleem voor als opgelost.*

Analyseer de figuur.

- *Vertaal in een ander probleem of herformuleer door te redeneren vanuit deze figuur.*

(heuristische methode – kennisorganisatie: eigenschap raaklijn)



<u>Mathematisering</u> (Plan van aanpak)

Zoek het punt P zodat |PM| gelijk is aan het maatgetal van de lengte van de schuine zijde van een rechthoekige driehoek met rechthoekszijden 4 cm en 7 cm.

- *|PM| berekenen*
- *De cirkel c(M,|PM|) tekenen*

<u>Uitwerking – constructie</u>

Constructie uitvoeren (nieuwe tekening)

<u>Antwoord en reflectie</u> :

- *Punt P aanduiden*
- *Zijn er meerdere oplossingen? Is er altijd een oplossing?*

7 Dartsbord

Een dartsbord met straal 24cm bestaat uit een rode schijf, een witte ring en een zwarte ring zoals in de figuur. De verhouding tussen de oppervlaktes van het rode, het witte en het zwarte gebied is 1:8:7.

Wat is de straal van de bull's eye (rode schijf)?

(Bron: JWO 2025 Tweede ronde)

(Antwoord: 6cm)

Mogelijke probleemaanpak / heuristieken

- Rekenen met gelijkvormigheidsfactor (lengte versus oppervlakte)

Oplossing

De oppervlakte van het rode gebied is 16 keer kleiner dan de oppervlakte van het volledige dartsbord. De straal van het rode gebied is dus vier keer kleiner dan die van het dartsbord.

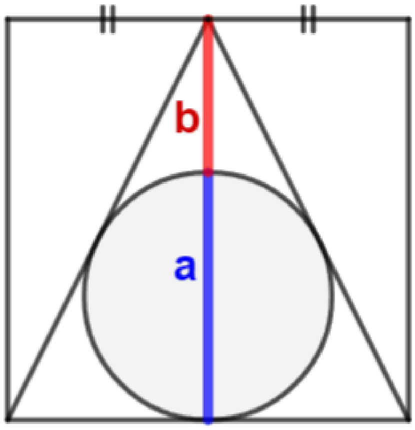
De straal van de bull's eye is 6cm.

Mogelijke differentiatie

- Eenvoudig: formuleer de opgave met een dartsbord dat uit twee gebieden bestaat.

8 De gulden snede

In een vierkant wordt een gelijkbenige driehoek en de bijhorende ingeschreven cirkel getekend. (Zie figuur)



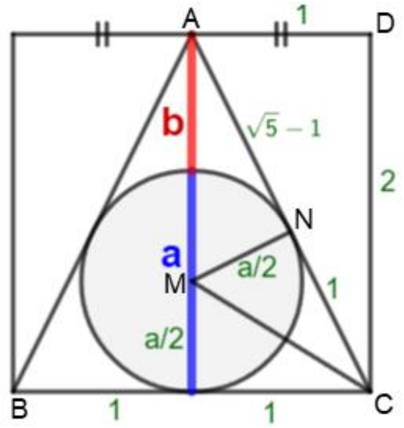
Toon aan dat $\frac{a}{b}$ gelijk is aan de gulden snede. (De gulden snede $= \varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$)

Mogelijke probleemaanpak

- Gelijkvormige figuren behouden de verhouding: we kiezen 2 als lengte van de zijde van het vierkant.
- De link herkennen met gekende inhouden

Oplossing

- Mogelijkheid 1: stelling van Pythagoras en gelijkvormige driehoeken



✓ $|AC| = \sqrt{5}$ (stelling van Pythagoras)

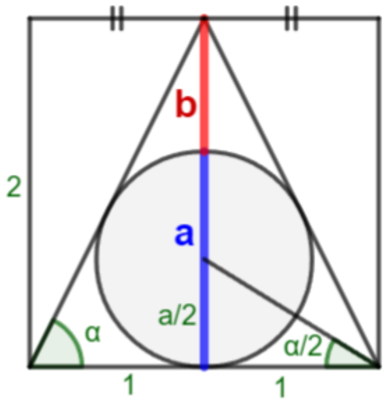
✓ $\Delta ANM \sim \Delta CDA \Rightarrow \dfrac{\sqrt{5}-1}{2} = \dfrac{a/2}{1}$ of $a = \sqrt{5}-1$

✓ $b = 2 - a = 3 - \sqrt{5}$

✓ $\dfrac{a}{b} = \dfrac{\sqrt{5}-1}{3-\sqrt{5}} = \dfrac{\sqrt{5}-1}{3-\sqrt{5}} \cdot \dfrac{3+\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}} = \dfrac{2+2\sqrt{5}}{4} = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

Ook de eigenschap van de macht van een punt t.o.v. een cirkel leidt tot de oplossing!

- Mogelijkheid 2: formule van de tangens van een dubbele hoek



✓ $\tan\alpha = 2$ en $\tan\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{a}{2}$

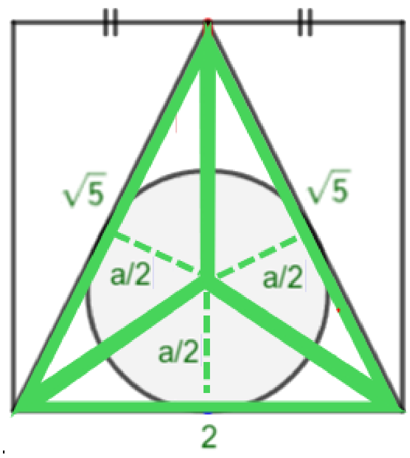
✓ $\tan\alpha = \dfrac{2.\tan(\alpha/2)}{1-\tan^2(\alpha/2)}$

$2 = \dfrac{a}{1-a^2/4}$

$a = \sqrt{5}-1$ of $\cancel{a = -1-\sqrt{5}}$

✓ $\dfrac{a}{b} = \dfrac{a}{2-a} = \dfrac{\sqrt{5}-1}{3-\sqrt{5}} = \ldots = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

- Mogelijkheid 3: via de oppervlakte van de gelijkbenige driehoek



✓ $A_\Delta = \dfrac{2.2}{2} = 2$

✓ De oppervlakte als de som de oppervlaktes van 3 driehoeken:

$A_\Delta = \dfrac{2.a/2}{2} + \dfrac{\sqrt{5}.a/2}{2} + \dfrac{\sqrt{5}.a/2}{2} = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}a$

✓ Hieruit volgt: $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}a = 2$ of $a = \sqrt{5}-1$

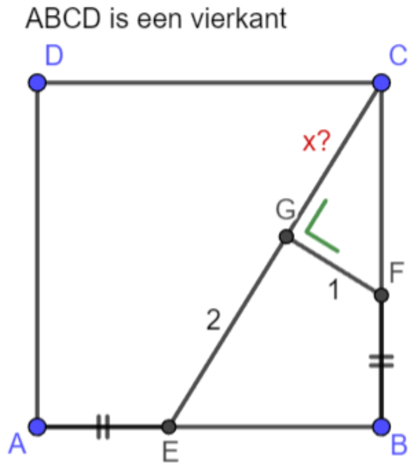
✓ $\dfrac{a}{b} = \dfrac{a}{2-a} = \dfrac{\sqrt{5}-1}{3-\sqrt{5}} = \ldots = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

Mogelijke differentiatie

- Eenvoudig:
  - 2 als lengte van de zijde van het vierkant bij de opgave geven
  - 1 of meerdere hulplijnen bij de opgave tekenen

9 Lengte van een lijnstuk (1)

Bereken x = |CG|.



(Antwoord: $\boldsymbol{\frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}618}$ *)*

Mogelijke probleemaanpak / heuristieken

- Herkennen van gekende meetkundige figuren (gelijkvormige driehoeken)

Oplossing

ABCD is een vierkant en de lijnstukken [AE] en [BF] zijn even lang. Hieruit volgt dat ook de lijnstukken [BE] en [CF] de zelfde lengte hebben.

Stel: $a = |BE| = |CF|$ en $b = |AE| = |BF|$

ΔBCE is gelijkvormig met ΔGCF waardoor de overeenkomstige zijden evenredig zijn:

$$\frac{a}{1} = \frac{x+2}{a} = \frac{a+b}{x}$$

Uit de eerste gelijkheid volgt: $a^2 = x + 2$

Voor ΔGCF volgt uit de stelling van Pythagoras: $a^2 = x^2 + 1$.

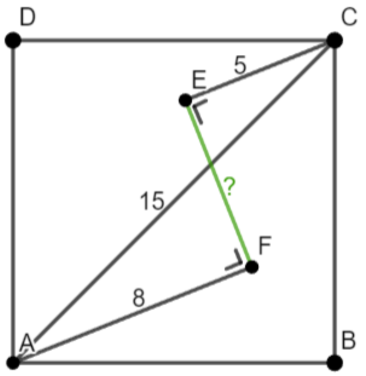
Uit deze twee gelijkheden leiden we de vergelijking $x^2 - x - 1 = 0$ af. De oplossingen van deze vergelijking zijn $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ en $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Doordat x een strikt positief getal is (lengte), is x gelijk aan $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ $(\approx 1{,}618)$. Merk op dat deze uitkomst de gulden snede is.

10 Lengte van een lijnstuk (2)

De vierhoek ABCD is een vierkant.

- $|AC| = 15$
- $|AF| = 8$
- $|CE| = 5$

Bereken de lengte van het lijnstuk [EF].



(Antwoord: $2\sqrt{14}$)

Mogelijke probleemaanpak en oplossing

Zie https://pro.katholiekonderwijs.vlaanderen/klasklare-inspiratie-voor-wiskunde

(Artikel: Voorbeeld – Lengte van een lijnstuk)

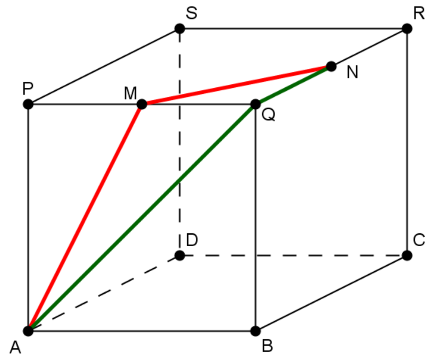
11 Mieren

Bij het hoekpunt A van een kubus ABCD.PQRS met ribbe 6 bevinden zich twee mieren. De eerste mier kruipt in rechte lijn van A naar het midden M van [PQ] en vandaar naar het midden N van [QR]. De tweede gaat van A naar Q en dan naar N. Welke mier legt de kortste afstand af?

(Antwoord: eerste mier)

Mogelijke probleemaanpak / heuristieken

- Tekenen van de ontvouwing van het voor- en bovenvlak en meten met de geodriehoek
- Of tekenen van de ontvouwing van het voor- en bovenvlak en meten met GeoGebra
- Of schetsen en berekenen met stelling van Pythagoras



Oplossing

We berekenen met de stelling van Pythagoras de afgelegde afstand van beide mieren. De eerste en de tweede mier leggen respectievelijk 10,95m en 11,49m af.

De eerste mier heeft dus de kortste route.

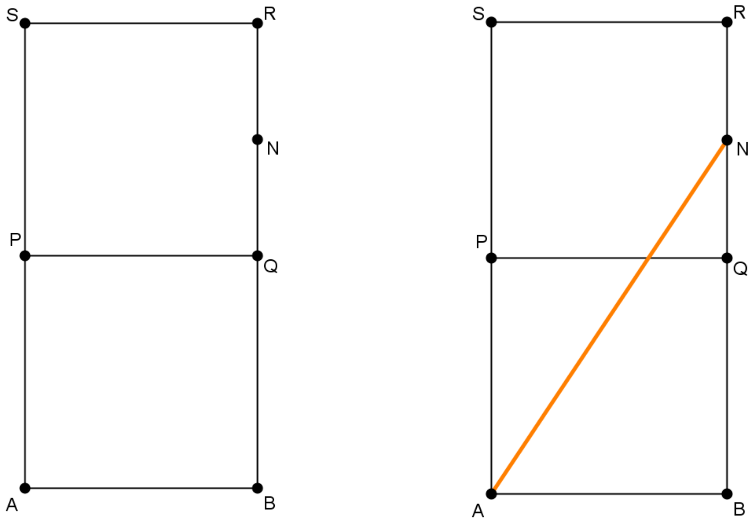
Mogelijke differentiatie

- Eenvoudig: geef ook de ontvouwing (van het voor- en bovenvlak)
- Complex: stel onderstaande extra vraag over de kortste weg van A naar N

Extra vraag

Een derde mier neemt de kortst mogelijke weg van A naar N. Bereken de afstand van deze kortst mogelijke weg.

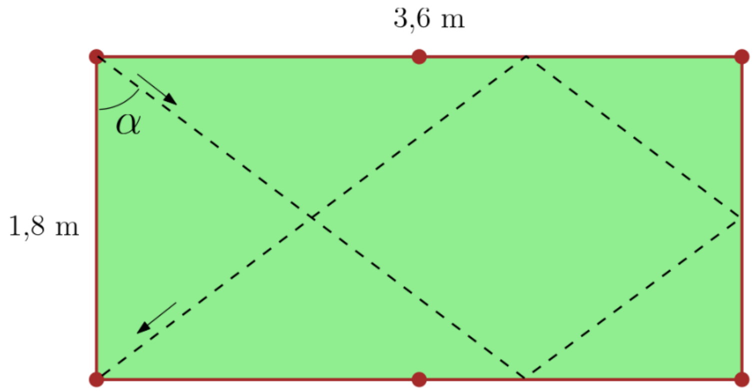
- De ontvouwing van het voor- en bovenvlak leidt ons naar de oplossing.



12 Snookertafel

Op een snookertafel van 3,6 meter op 1,8 meter wordt een bal vanuit de linkerbovenhoek naar de linkeronderhoek gespeeld via 3 randen van de tafel (zie de stippellijn op de figuur). We nemen aan dat bij een botsing van de bal met een rand de invalshoek steeds gelijk aan de uitvalshoek is.

Bepaal de hoek α.



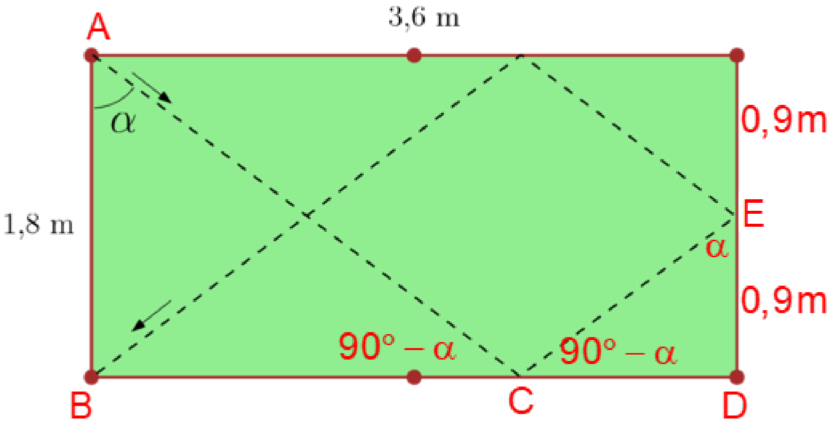
(Antwoord: 63,4°)

Mogelijke probleemaanpak / heuristieken

- Aanduiden van alle gegevens op de figuur
- Aanduiden van alle gelijke hoeken en even lange lijnstukken.
- Herkennen van gekende meetkundige figuren (gelijkvormige driehoeken driehoeken)
- Kiezen van de juiste verhouding (tangens, sinus of cosinus).

Oplossing

We duiden op de figuur enkele gelijke hoeken en zijden aan en herkennen zo de gelijkvormige driehoeken ABC en EDC. De zijden van driehoek ABC zijn dubbel zo lang als die van driehoek EDC.



Nu kunnen we de lengte van het lijnstuk [BC] berekenen.

$$\left.\begin{array}{l}|BC| + |CD| = 3{,}6 \\ |BC| = 2.|CD|\end{array}\right\} \Rightarrow |BC| = 2{,}4 \wedge |CD| = 1{,}2$$

Met de tangens berekenen we de hoek α.

$$\tan\alpha = \frac{2{,}4}{1{,}8} = 2 \Rightarrow \alpha \approx 63{,}4° \quad (0 < \alpha < 90°)$$

Mogelijke differentiatie

- Eenvoudiger: duid de gelijke hoeken aan op de gegeven figuur.

13 Touw om de aarde

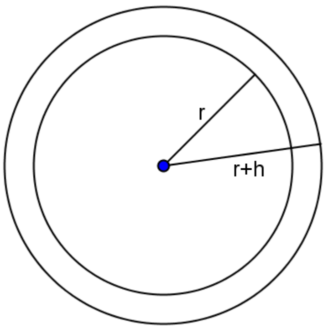
We spannen een (niet-rekbaar) touw om de aarde, over de polen langs de nulmeridiaan. Aan de Noordpool knippen we het touw open en voegen een stuk van één meter lang in. Als we het touw overal even hoog optillen, hoe hoog komt het dan boven de aarde te hangen?

(Antwoord: 0,159m of 15,9cm)

Mogelijke probleemaanpak / heuristieken

- Het maken van een figuur
- Het opstellen van een formule

Oplossing



We berekenen op 2 manier de omtrek van de grootste cirkel:

$$\begin{aligned} 2\pi.(r+h) &= 2\pi.r + 1 \\ 2\pi.r + 2\pi.h &= 2\pi.r + 1 \\ 2\pi.h &= 1 \\ h &= \frac{1}{2\pi} \approx 0{,}159 \end{aligned}$$

Het touw hangt 0,159m of 15,9cm boven de aarde.

Mogelijke differentiatie

- Eenvoudig: geef de straal van de aarde

14 Verlichting op een voetbalveld

De verlichting bij voetbalvelden is zodanig opgesteld dat elke plaats van het veld door minstens twee verschillende en even hoge masten belicht wordt. Je ziet dan ook twee of meer schaduwen van een speler op het veld.

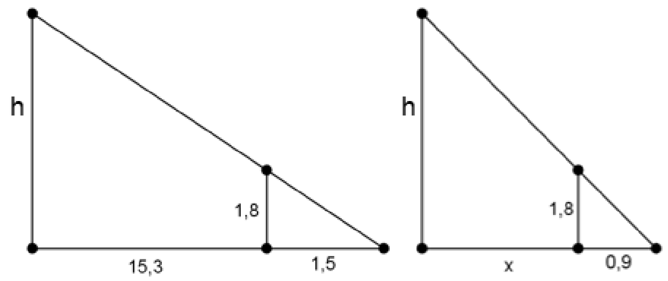
Een speler met een lengte van 1,8 meter staat op 15,3 meter van een lichtmast en heeft dan een schaduw van 1,5 meter. De schaduw van deze speler door een tweede lichtmast is 0,9 meter. Bij welke mast staat de speler het dichtst? Hoever staat de speler van de tweede mast verwijderd?

(Antwoord: 9,18m)

Mogelijke probleemaanpak / heuristieken

- Maken van een schets (twee afzonderlijke figuren) en aanduiden van alle gegevens en het gevraagde
- Opsplitsen in deelproblemen

Oplossing



In beide figuren zien we twee gelijkvormige driehoeken.

De overeenkomstige zijden zijn dus telkens evenredig: $\frac{h}{16{,}8} = \frac{1{,}8}{1{,}5}$ en $\frac{h}{x+0{,}9} = \frac{1{,}8}{0{,}9}$.

Hieruit volgt: $h = 20{,}16$ en $x = 9{,}18$.

De speler staat het dichtst bij de tweede lichtmast, namelijk op 9,18m.

Mogelijke differentiatie

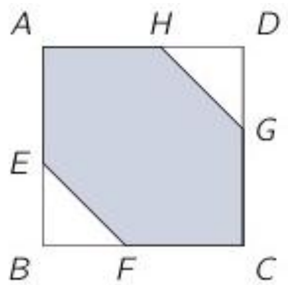
- Eenvoudig: formuleer de vraag met deelvragen.

15 Zijde van een zeshoek

In nevenstaande figuur is ABDC een vierkant met zijde 1 en AEFCGH een zeshoek met zes zijden van dezelfde lengte.

Wat is die lengte?

(Bron: VWO 2024 Eerste ronde)



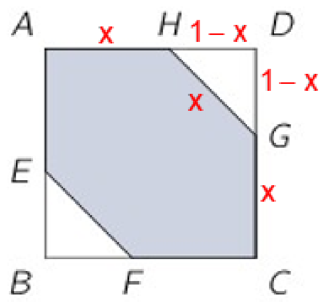
(Antwoord: $2-\sqrt{2}$)

Mogelijke probleemaanpak / heuristieken

- Herkennen van rechthoekige driehoeken
- Toepassen van de stelling van Pythagoras
- Oplossen van een tweedegraadsvergelijking

Oplossing

Stel $x = |AH| \Rightarrow |HD| = 1 - x$ en $|GH| = x$, hierbij is $0 < x < 1$. De zijde van het vierkant is immers 1 en alle zijden van de zeshoek hebben dezelfde lengte. (Zie figuur.)



In ΔDHG passen we nu de stelling van Pythagoras toe. Na vereenvoudiging bekomen we de vergelijking $x^2 - 4x + 2 = 0$.

Rekening houdend met het feit dat $0 < x < 1$ is $x = 2 - \sqrt{2}$ de enige oplossing. Elke zijde van de zeshoek is $2 - \sqrt{2}$ lang.

DE OPGAVE ANDERS BEKEKEN

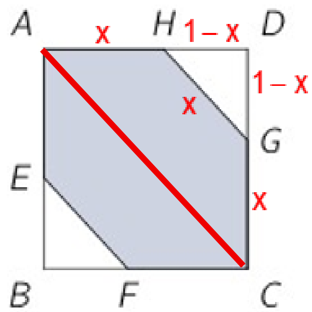
Mogelijke probleemaanpak / heuristieken

- Tekenen van een hulplijn
- Herkennen van gelijkvormige driehoeken
- Rekenen met reële getallen (noemer wortelvrij maken)

Oplossing

We tekenen de diagonaal [AC] van het vierkant en herkennen twee gelijkvormige driehoeken, namelijk ΔACD en ΔHGD.

De overeenkomstige zijden zijn evenredig: $\dfrac{x}{\sqrt{2}} = \dfrac{1-x}{1}$



We lossen deze vergelijking op:

$$\frac{x}{\sqrt{2}} = \frac{1-x}{1} \Leftrightarrow x = \sqrt{2} - \sqrt{2}x$$

$$\Leftrightarrow (1+\sqrt{2})x = \sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}$$

Door de noemer wortelvrij te maken bekomen we $x = 2 - \sqrt{2}$

16 Zwaartelijnen

Teken in een willekeurige driehoek de drie zwaartelijnen. Deze driehoek wordt zo in zes kleinere driehoeken verdeeld.

Onderzoek het verband tussen de oppervlakten van deze zes driehoeken. Toon het gevonden verband aan.

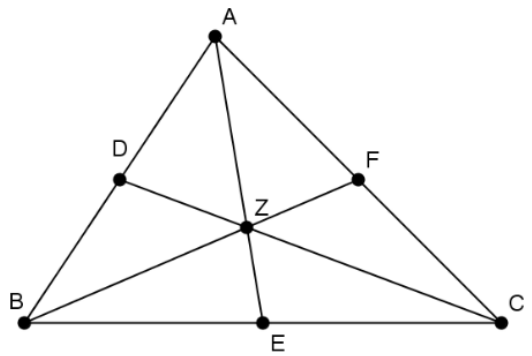
(Antwoord: de oppervlakte van de 6 driehoeken zijn gelijk)

Mogelijke probleemaanpak / heuristieken

- Exploreren in GeoGebra
- Aantonen van gelijke oppervlakten door gebruik te maken van het feit dat zwaartelijnen de zijden in twee gelijke delen verdelen.

Oplossing

Met GeoGebra stellen we vast dat de oppervlaktes van de zes driehoeken even groot zijn.



Dit kunnen we bewijzen door het feit dat E, D en F de middens van de drie zijden zijn: de oppervlaktes van driehoeken met een even lange basis en dezelfde hoogte zijn gelijk.

DEEL 3 MEETKUNDE – OPPERVLAKTEBEREKENING

17 Een cirkelvormige spiegel

Los volgend probleem op zonder gebruik te maken van een rekenmachine.

De oppervlakte van een cirkelvormige spiegel bedraagt $2024\pi cm^2$. Kun je de spiegel snijden uit een vierkante spiegel met een omtrek van 360cm?

(Antwoord: ja)

Mogelijke probleemaanpak

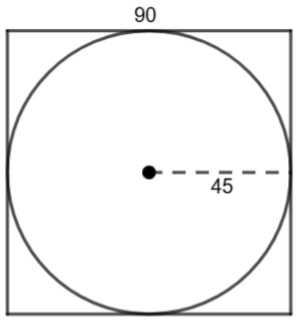
- Tekenen van een schets
- Beredeneren wat de grootst mogelijke cirkel in het geven vierkant is

Oplossing

Een zijde van de vierkante spiegel is 90cm lang.

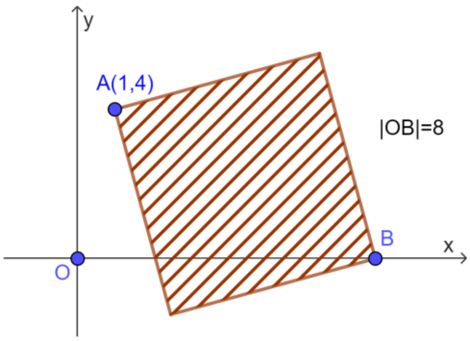
De grootste cirkel die uit deze vierkante cirkel kan gesneden worden heeft een straal van 45cm. De oppervlakte van deze cirkel is dus $2024\pi cm^2$.

We kunnen dus een cirkel met oppervlakte $2024\pi cm^2$ snijden uit een vierkante cirkel met een omtrek van 360cm.



18 Gekanteld vierkant

Bereken de oppervlakte van het gearceerde vierkant.



(Antwoord: 17/2)

Mogelijke probleemaanpak

- Tekenen van een hulplijn (het lijnstuk [AB] als diagonaal)
- Toepassen van de stelling van Pythagoras

Oplossing

Met de afstandsformule voor twee punten berekenen we lengte van de diagonaal:

$$|AB| = \sqrt{(8-4)^2 + (0-1)^2} = \sqrt{17}$$

Met de stelling van Pythagoras berekenen we het kwadraat van een zijde $(= z^2)$ van het vierkant. Dit is de gevraagde oppervlakte van het gearceerde vierkant.

$$z^2 + z^2 = \left(\sqrt{17}\right)^2 \quad \text{of} \quad z^2 = \frac{17}{2}$$

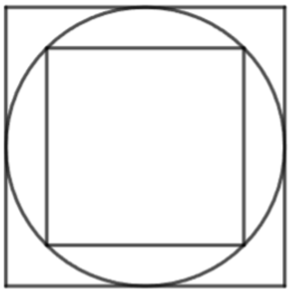
Mogelijke differentiatie

- Eenvoudig: Op de gegeven figuur tekenen we al de diagonaal [AB]
- Complex: We kunnen ook vragen naar de coördinaten van de twee overige hoekpunten van het vierkant.

19 Omgeschreven en ingeschreven vierkant

Wat is de verhouding tussen de oppervlakte van een omgeschreven en een ingeschreven vierkant van een cirkel?

(Bron: VWO 2021 Tweede ronde)



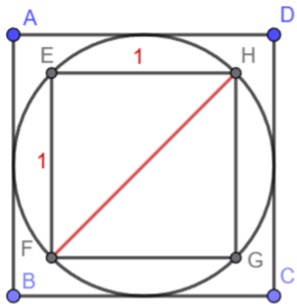
(Antwoord: 2)

Mogelijke probleemaanpak / heuristieken

- Rekenen met eenvoudige getallen
- Herleiden naar een eenvoudiger probleem
- Tekenen van een hulplijn
- Toepassen van de stelling van Pythagoras

Oplossing

Er wordt gevraagd naar de verhouding van de oppervlaktes en gelijkvormige figuren behouden de verhoudingen. Daarom mogen we de lengte van het kleine vierkant gelijk aan 1 stellen.



De diagonaal van het kleine vierkant laat ons toe om de oppervlakte van beide vierkanten te berekenen. De lengte van deze diagonaal is immers ook de lengte van het grote vierkant.

$$|FH|^2 = |EF|^2 + |EH|^2 = 1 + 1 = 2$$
$$\Rightarrow |FH| = \sqrt{2}$$
$$\Rightarrow |AB| = \sqrt{2} \qquad (|AB| = |FH| = \text{diameter})$$

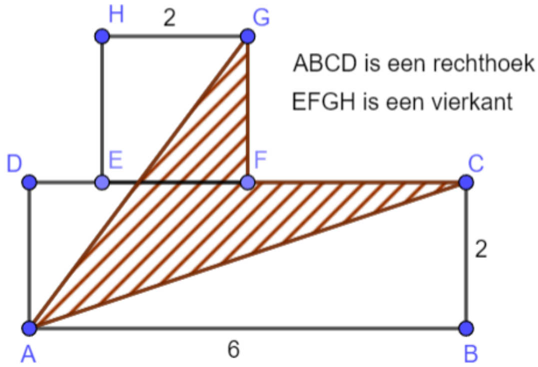
$$A_{EFGH} = 1^2 = 1 \text{ en } A_{ABCD} = \sqrt{2}^2 = 2$$
$$\Rightarrow \frac{A_{ABCD}}{A_{EFGH}} = \frac{2}{1} = 2$$

Mogelijke differentiatie

- Eenvoudig:
  - Geef de lengte van de zijde van het kleine vierkant.
  - Geeft de lengte van de diagonaal van het kleine vierkant.

20 Oppervlakteberekening (1)

Bereken de gearceerde oppervlakte.



(Antwoord: 6)

Mogelijke probleemaanpak / heuristieken

- Herkennen van gekende meetkundige figuren (congruente driehoeken)
- Herleiden naar een eenvoudiger probleem

Oplossing

Stel: P is het snijpunt van de lijnstukken [DF] en [GF]

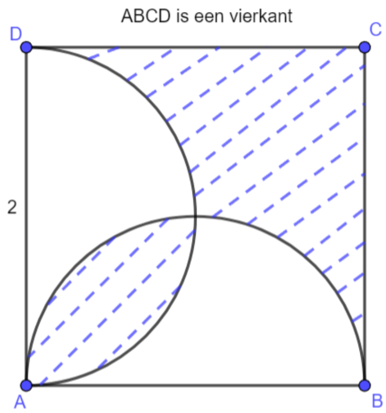
Doordat ΔPFG en ΔPDA congruente driehoeken zijn, is de gearceerde oppervlakte gelijk aan de oppervlakte van ΔACD .

Mogelijke differentiatie

- Eenvoudiger figuur: verschuif het vierkant EFGH naar links zodat D en E samenvallen.

21 Oppervlakteberekening (2)

Bereken de gearceerde oppervlakte.



(Antwoord: 2)

Mogelijke probleemaanpak / heuristieken

- Tekenen van hulplijnen (de diagonalen)
- Herkennen van congruente figuren
- Herleiden naar een eenvoudiger figuur

Oplossing

Door het tekenen van tekenen van de beide diagonalen, zien we dat de gearceerde oppervlakte gelijk is aan de helft van de oppervlakte van het vierkant.

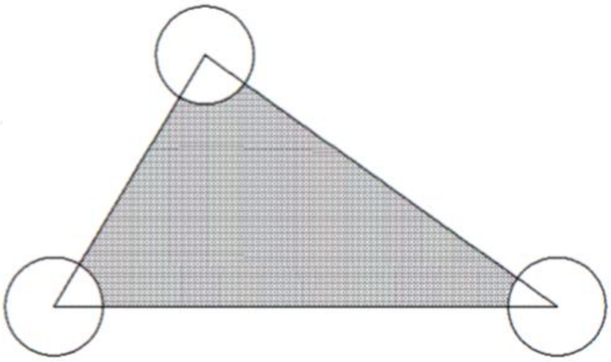
De gearceerde oppervlakte is dus gelijk aan 2.

Mogelijke differentiatie

- Eenvoudig: Teken al één of beide diagonalen.

22 Oppervlakteberekening (3)

De oppervlakte van de driehoek is 25m² en de oppervlakte van elke cirkel met een hoekpunt van de driehoek als middelpunt is 4m². Wat is de oppervlakte van het grijze gebied?



(Antwoord: 23m^2)

Mogelijke probleemaanpak / heuristieken

- Blikwissel

Oplossing

De drie cirkelsectoren die uit de driehoek weggeknipt zijn, vormen samen een halve cirkel. Hiervoor steunen we op het feit dat de som van de hoeken van een driehoek 180° is.

De grijze oppervlakte is dus gelijk aan 23m^2 (= 25-2).

Mogelijke differentiatie

- Eenvoudig: Stel een analoge vraag met een rechthoek i.p.v. een driehoek.

23 Oppervlakte van een driehoek (1)

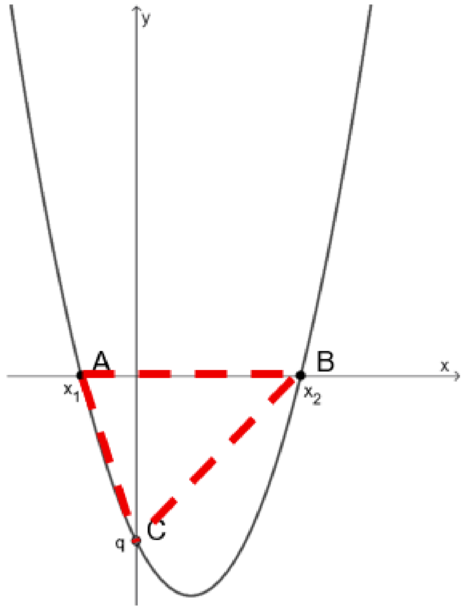
De parabool met vergelijking $y = x^2 + p.x + q$ snijdt de assen in de punten A, B en C. Bereken de oppervlakte van de driehoek ABC.

(Antwoord: $|q|.\sqrt{p^2 - 4q}$)

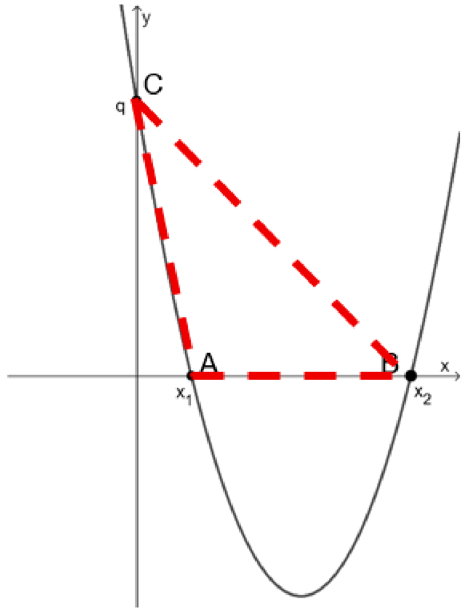
Mogelijke probleemaanpak

- Schetsen van alle mogelijke parabolen

Oplossing



of



- De waarde van q kan zowel positief als negatief zijn.
- De twee oplossingen (x_1 en x_2 met $x_1 < x_2$) van de vergelijking $x^2 + p.x + q = 0$ zijn:

$$x_1 = \frac{-p - \sqrt{p^2 - 4q}}{2} \text{ en } x_2 = \frac{-p + \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$$

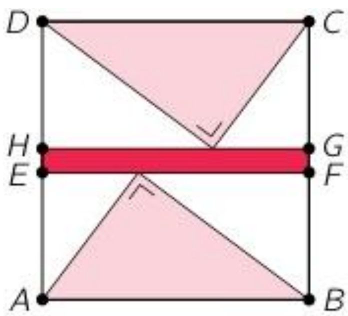
- $A_{\Delta ABC} = \frac{(x_2 - x_1).|q|}{2} = |q|.\sqrt{p^2 - 4q}$

Mogelijke differentiatie

- Eenvoudig: De parabool met vergelijking $y = x^2 - 2.x - 3$ snijdt de assen in de punten A, B en C. Bereken de oppervlakte van de driehoek ABC.

24 Oppervlakte van een rechthoek (1)

In het vierkant ABCD zijn twee rechthoekige driehoeken en een rechthoek EFGH geconstrueerd zoals in de figuur. Beide driehoeken hebben rechthoekszijden met lengte 6 en 8.



Wat is de oppervlakte van rechthoek EFGH?

(Bron: JWO 2024 Eerste ronde)

(Antwoord: 4)

Mogelijke probleemaanpak / heuristieken

- Verband zien tussen de rechthoekige driehoeken en de 3 witte driehoeken
- Toepassen van de stelling van Pythagoras

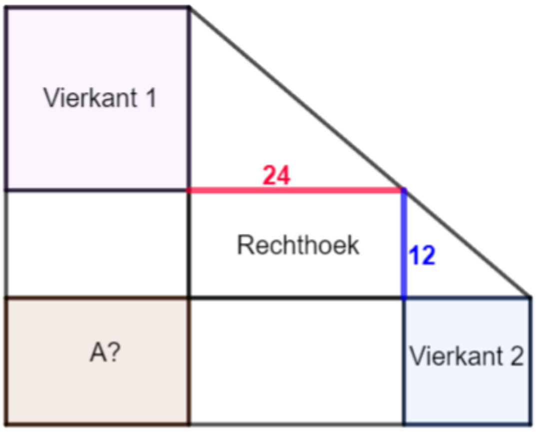
Oplossing

Met de stelling van Pythagoras vinden we dat de zijde van het vierkant ABCD 10 is.

De oppervlakte een gekleurde rechthoekige driehoek is 24 ($=\frac{6.8}{2}$). Hierdoor zijn de oppervlaktes van de rechthoeken CDHG en ABGE beide 48 (= 2.24).

De oppervlakte van de rechthoek EFGH is dus 4 (= 100-2.48).

25 Oppervlakte van een rechthoek (2)



Bereken de oppervlakte A.

(Antwoord: 288)

Mogelijke probleemaanpak / heuristieken

- Herkennen van gelijkvormige driehoeken

Oplossing

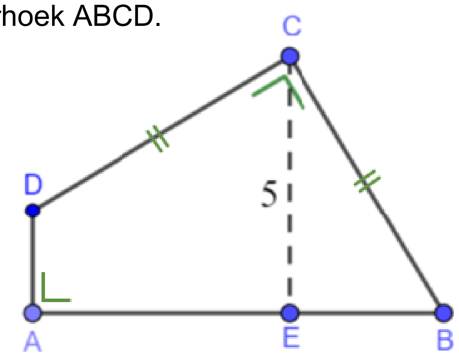
A=a.b (a = de lengte van de zijden van vierkant 1, b = lengte van de zijden van vierkant 2)

Uit de gelijkvormige driehoeken volgt: $\frac{a}{12}=\frac{24}{b}$ of $a.b=12.24=288$

Besluit: A = 288

26 Oppervlakte van een vierhoek (1)

Bereken de oppervlakte van vierhoek ABCD.



(Antwoord: 25)

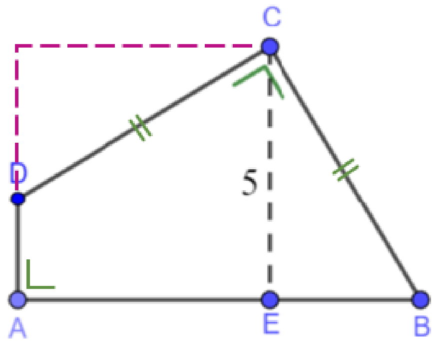
Mogelijke probleemaanpak / heuristieken

- Tekenen van hulplijnen
- Herkennen van driehoeken
- Herleiden van de vraag naar een eenvoudiger vraag (oppervlakte van een vierkant).

Oplossing

We tekenen de twee stippellijnen.

De twee rechthoekige driehoeken zijn congruent waardoor de oppervlakte van vierhoek ABCD gelijk is aan de oppervlakte van het vierkant met zijde 5.

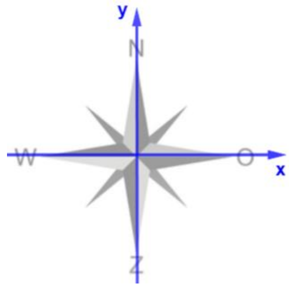


Mogelijke differentiatie

- Eenvoudig: geef de figuur waarop al de twee hulplijnen getekend zijn.

DEEL 4 MEETKUNDE – VECTOREN

27 Wind en roeiboot op de Leie



Tijdens een sportdag roeit een ploeg op de Leie. De bootsnelheid ten opzichte van het water in meter per seconde wordt beschreven door de vector $\vec{v}_b(2,3)$. Er komt een wind op die een kleine drift veroorzaakt. Deze wordt beschreven door de vector $\vec{v}_w(1,-1)$.

Bepaal de resulterende snelheidsvector van de roeiboot, de snelheid en beschrijf de vaarrichting.

(Antwoord: $\vec{v}(3,2)$; 3,61m/s; 33,7° t.o.v. oostelijke richting - NO)

Mogelijke probleemaanpak / heuristieken

- Grafische voorstellen met vectoren
- Optellen van vectoren
- Toepassen van driehoeksmeting

Oplossing

De snelheidsvector $\vec{v}$ van de roeiboot is de som van $\vec{v}_b(2,3)$ en $\vec{v}_w(1,-1)$. Dit is $\vec{v}(3,2)$.

De norm van $\vec{v}$ bepaalt de snelheid van de boot en met de tangens kunnen we in een rechthoekige driehoek de vaarrichting t.o.v. het Oosten berekenen.

Mogelijke differentiatie

- Complex: laat de vaarrichting t.o.v. het Noorden berekenen.

DEEL 5 GONIOMETRIE

28 Een drone boven het schooldomein

Tijdens een STEM-activiteit vliegt een drone boven het speelplein van de school. De verticale projectie van de drone en twee observatiepunten A en B liggen op eenzelfde rechte, waarbij de projectie van de drone tussen A en B ligt. De observatiepunten A en B liggen 120 meter uit elkaar. De elevatiehoek naar de drone is 18 graden vanuit A en 25 graden vanuit B.

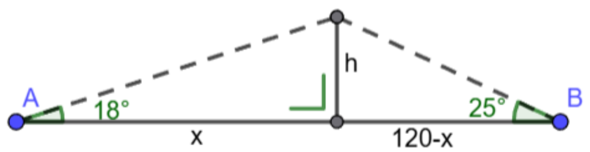
Hoe hoog vliegt de drone momenteel?

(Antwoord: 23m)

Mogelijke probleemaanpak / heuristieken

- Maken van een schets (zijaanzicht) en aanduiden van alle gegevens
- Kiezen van de juiste verhouding in de rechthoekige driehoeken (tangens, sinus of cosinus).

Oplossing



In beide rechthoekige driehoeken berekenen we de hoogte h.

Hieruit volgt: $h = x.\tan 18° = (120 - x)\tan 25°$

Met deze gelijkheid vinden we achtereenvolgens x en h.

Mogelijke differentiatie

- Visueel: Voeg een figuur toe aan de opgave al dan niet met de vermelding van de gegevens.

29 Fietshelling aan de Coupure

Voor een tijdelijke omleiding aan de Coupure moet een fietshelling worden aangelegd. In het ontwerp stijgt de helling 1,2 meter over een horizontale afstand van 10 meter. De dienst Toegankelijkheid vraagt bovendien een rolstoelhelling met een maximale hellingshoek van 5° om dezelfde hoogte te overbruggen.

Is de geplande fietshelling volgens dit ontwerp ook geschikt als rolstoelhelling? Motiveer je antwoord.

(Antwoord: nee)

Mogelijke probleemaanpak / heuristieken

- Maken van een schets van de rechthoekige driehoek en aanduiden van alle gegevens aan
- Kiezen van de juiste verhouding (tangens, sinus of cosinus)

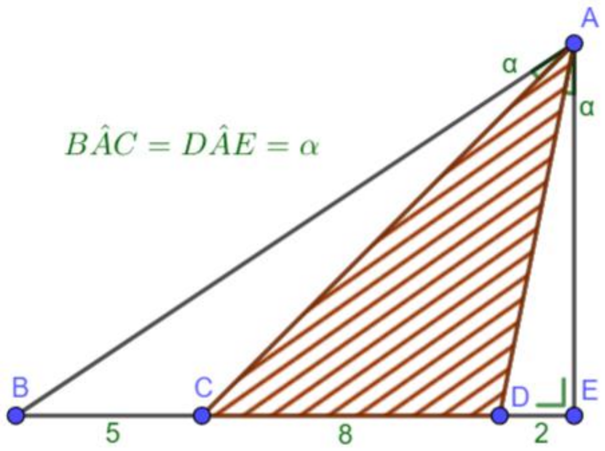
Oplossing

Met de tangens kunnen we in een rechthoekige driehoek de hellingshoek van de fietshelling berekenen. Deze is 6,8° en is dus groter dan de gewenste hellingshoek van 5° voor een rolstoelhelling. De fietshelling is niet geschikt als rolstoelhelling.

Mogelijke differentiatie

- Eenvoudig:
  - Voeg een schets of een tekening op schaal van de fietshelling toe aan de opgave.
  - Formuleer de vraag met deelvragen.
- Complex: ‘Welke aanpassing aan het ontwerp stel je voor zodat de fietshelling ook bruikbaar is voor rolstoelgebruikers?’

30 Oppervlakte van een driehoek (2)



Bereken de oppervlakte van driehoek ACD.

(Antwoord: 40)

Mogelijke probleemaanpak

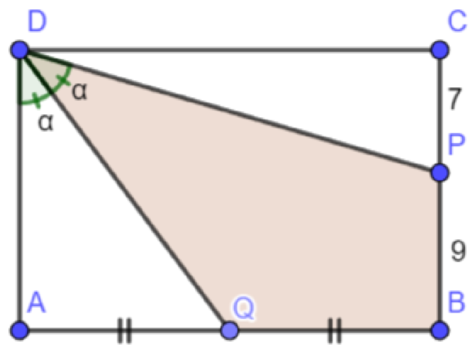
- Herkennen van drie rechthoekige driehoeken
- Toepassen van de formule voor de tangens van de som van twee hoeken

Oplossing

- $\tan\alpha = \frac{2}{h}$, $\tan(\alpha+\beta) = \frac{10}{h}$ en $\tan(2\alpha+\beta) = \frac{15}{h}$ met $\beta = C\hat{A}D$ en $h = |AE|$
- $\tan(2\alpha+\beta) = \tan(\alpha+(\alpha+\beta)) = \dfrac{\tan\alpha + \tan(\alpha+\beta)}{1-\tan\alpha.\tan(\alpha+\beta)}$
- Hieruit volgt: $h = 10$ en $A_{\Delta ACD} = \frac{8.10}{2} = 40$

31 Oppervlakte van een vierhoek (2)

In de rechthoek ABCD is $|BP| = 9$, $|CP| = 7$, $|AQ| = |BQ|$ en $A\hat{D}Q = Q\hat{D}P = \alpha$.



Bereken de oppervlakte van de vierhoek DQBP.

(Antwoord: 108)

Mogelijke probleemaanpak

- Blikwissel: berekenen van de oppervlakte van de twee rechthoekige driehoeken
- Berekenen van $|CD|$ m.b.v. de formule voor $\tan(2\alpha)$

Oplossing

$CPQ = 2\alpha$ (verwisselende binnenhoeken)

Stel $|CD| = 2x \Rightarrow |AQ| = x$

- $\tan\alpha = \frac{x}{16}$, $\tan(2\alpha) = \frac{2x}{7}$ en $\tan(2\alpha) = \frac{2.\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$

  $$\Rightarrow \frac{2x}{7} = \frac{2.\frac{x}{16}}{1-\frac{x^2}{256}} \Rightarrow x = 12$$
- $A_{ABCD} = 2x.16 - x.7 - x.16 = 9x = 108$

Mogelijke differentiatie

- Eenvoudig:
  - Duid de hoek $CPQ = 2\alpha$ op de figuur aan.
  - Geef de formule van $\tan(2\alpha)$ als tip.

32 Schaduw op het stationsplein

Op het stationsplein in Gent wordt een nieuwe lichtmast getest.

Een leerling van 1,80 meter staat op een open plek en merkt dat zijn schaduw duidelijk zichtbaar is op de vlakke bestrating. Zijn schaduwlengte is 2,4 meter.

Bereken de hellingshoek die de lichtstraal, vanuit de top van een mast van 12 meter, met de grond maakt op het punt waar de schaduw eindigt.

(Antwoord: 36°52'12'')

Mogelijke probleemaanpak / heuristieken

- Maken van een schets van de rechthoekige driehoek en aanduiden van alle gegevens (hoogte, schaduwlengte en hellingshoek).
- Kiezen van de juiste goniometrische verhouding (tangens, sinus of cosinus).

Oplossing

De hoogte van de mast is overbodige informatie.

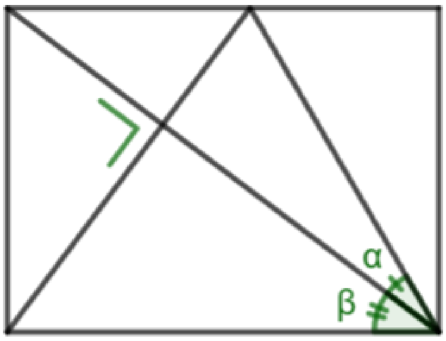
Met de tangens kunnen we in een rechthoekige driehoek de hellingshoek van de lichtstraal berekenen.

Mogelijke differentiatie

- Eenvoudig:
  - Geef een figuur.
  - Laat de hoogte van de mast weg (overbodige informatie).
- Complex: Bereken hoever de leerling van de mast staat i.p.v. de hellingshoek van de lichtstraal.

33 Tangens van een hoek (1)

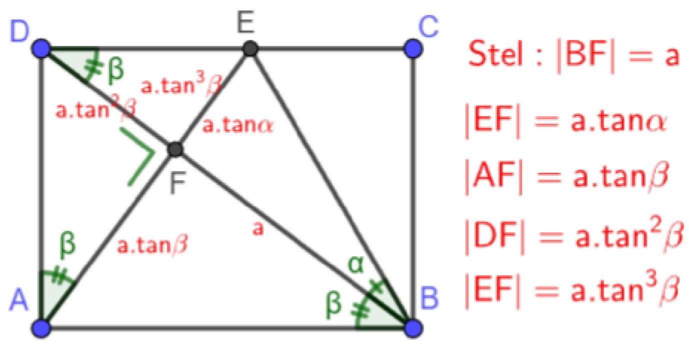
Toon de volgende gelijkheid aan: $\tan\alpha = \tan^3\beta$



Mogelijke probleemaanpak

- Herkennen van gelijkvormige driehoeken
- Uitdrukken van zoveel mogelijk zijden in functie van de tangens van α of β (zie afbeelding)

Oplossing



$\Rightarrow \tan\alpha = \tan^3\beta$

Mogelijke differentiatie

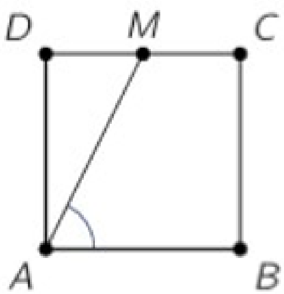
- Eenvoudig: stel $|BF| = 1$

34 Tangens van een hoek (2)

In vierkant ABCD is M het midden van [CD].

Wat is de tangens van de hoek BAM ?

(Bron: VWO 2025 Eerste ronde)



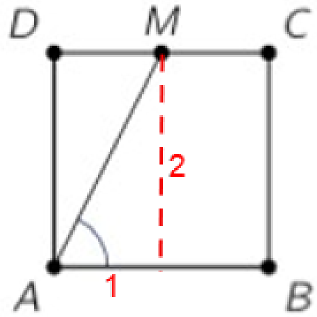
(Antwoord: 2)

Mogelijke probleemaanpak

- Rekenen met eenvoudige getallen
- Tekenen van een hulplijn
- Herkennen van een rechthoekige driehoek

Oplossing

Bij gelijkvormige figuren blijven de hoeken gelijk. Hierdoor stellen we de lengte van de zijde van het vierkant gelijk aan 2. We tekenen ook de loodlijn uit M op [AB].



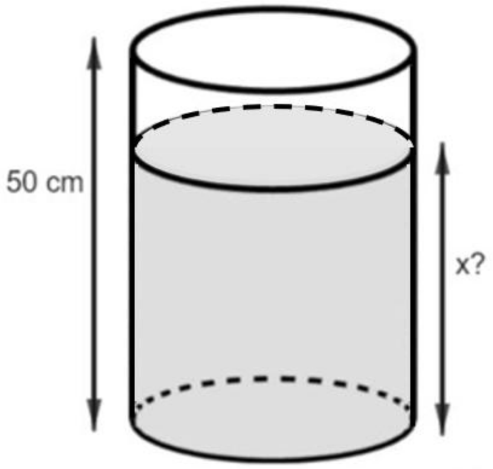
Hieruit volgt: $\tan(BAM) = \frac{2}{1} = 2$

Mogelijke differentiatie

- Eenvoudig: Je kan de lengte van een zijde van het vierkant geven.

35 Waterpeil in een cilinder

De gegeven cilinder bevat een hoeveelheid water. Als we de cilinder kantelen zodat die een hellingshoek van 60° (met de grond) heeft, staat het water net tot aan de rand van het bovenvlak.



$straal\ grondvlak = 6\sqrt{3}\ cm$

Bereken het waterpeil x in de rechtstaande cilinder.

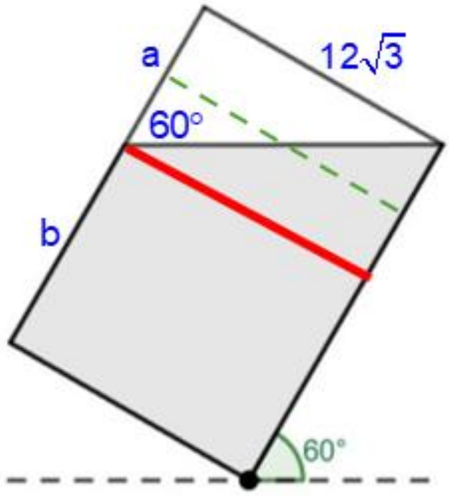
(Antwoord: 44cm)

Mogelijke probleemaanpak / heuristieken

- Tekenen van een figuur (zijaanzicht)
- Tekenen van een hulplijn

Oplossing

Zijaanzicht van de gekantelde cilinder:



$$\tan 60° = \frac{12\sqrt{3}}{a} = \sqrt{3} \;\Rightarrow\; a = 12$$
$$b = 50 - a = 38$$

Steunend op de symmetrie: $x = b + \frac{a}{2} = 38 + 6 = 44$

Het water staat 44 cm hoog.

DEEL 6 ALGEBRA, FUNCTIES EN ANALYSE

36 Afficheontwerp: maximale zichtbare oppervlakte

Een school maakt een affiche voor een smalle wand met hoogtebeperking. De breedte is x centimeter, de hoogte wordt modelmatig gegeven door $h(x) = 240 - 3x$. Voor de zichtbaarheid wil men de oppervlakte van de affiche A(x) maximaliseren.

Bepaal de afmetingen van de affiche met maximale oppervlakte.

(Antwoord: breedte 40cm, hoogte 120cm)

Mogelijke probleemaanpak / heuristieken

- Tekenen van een schets
- Herkennen van het verband met tweedegraadsfuncties
- Onderzoeken van het concrete domein
- Berekenen van de top van een parabool

Oplossing

$A(x) = x.(240 - 3x) = -3x^2 + 240x \text{ met } 0 < x < 80$

De grafiek van de oppervlaktefunctie is een parabool met als top het punt met coördinaten $(40, 4800)$. De breedte van de affiche is dus 40cm en de hoogte 120cm.

Mogelijke differentiatie

- Eenvoudig:
  - Visueel: voeg een figuur toe aan de opgave.
  - Geef het voorschrift van de oppervlaktefunctie als deel van de opgave.
- Complex:
  - Voeg restricties voor de breedte en/of hoogte van de affiche toe.
  - Vraag naar de maximale oppervlakte zonder naar de afmetingen te vragen.

37 Budgetlijn brood en beleg

De schoolkantine maakt een eenvoudige kostenraming voor broodjesverkoop. Brood kost 3 euro per stuk en beleg 2 euro per pakje. Met een dagbudget van 24 euro wil men weten welke combinaties mogelijk zijn en hoe dit grafisch kan worden voorgesteld.

Bepaal een vergelijking van de budgetlijn. Stel hiermee grafisch alle mogelijke combinaties voor en geef deze combinaties.

(Antwoord: 3x+2y=24)

Mogelijke probleemaanpak / heuristieken

- Proberen met een getallenvoorbeeld: Kies een combinatie (aantal broden en pakjes beleg) en bereken de prijs.
- Invoeren van variabelen
- Opstellen van een vergelijking van een rechte

Oplossing

We lossen de vraag op voor het geval dat het dagbudget elke dag volledig opgebruikt wordt.

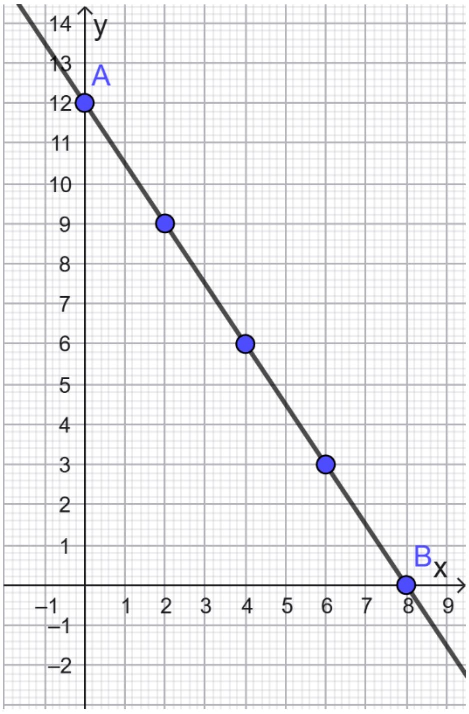
Stel:

- x = aantal broden
- y = aantal pakjes beleg

x en y zijn positieve gehele getallen.

Vergelijking van de budgetlijn: $3x + 2y = 24$

De mogelijke combinaties worden dus bepaald door de coördinaten van de punten met gehele coördinaten die op het lijnstuk [AB] liggen.



Mogelijke combinaties:

- ✓ 8 broden
- ✓ 6 broden en 3 pakjes beleg
- ✓ 4 broden en 6 pakjes beleg
- ✓ 2 broden en 9 pakjes beleg
- ✓ 12 pakjes beleg

Mogelijke differentiatie

- Eenvoudig: ‘Bepaal de snijpunten van de budgetlijn met de assen. Wat is de betekenis van deze snijpunten?’
- Complex: ‘Hoeveel verschillende combinaties van broodjes en beleg zijn mogelijk als je het budget niet volledig hoeft op te gebruiken? Toon hoe je tot dit aantal komt.’

38 Een volkomen kwadraat

Bereken $\sqrt{k} + \frac{1}{\sqrt{k}}$ als $k + \frac{1}{k} = 47$ met $k \in \mathbb{R}_0^+$.

(Antwoord: 7)

Mogelijke probleemaanpak / heuristieken

- Het herkennen van een verband (volkomen kwadraat).

Oplossing

We kwadrateren $\sqrt{k} + \frac{1}{\sqrt{k}}$:

$$\begin{aligned}
(\sqrt{k} + \frac{1}{\sqrt{k}})^2 &= k + 2 + \frac{1}{k} \\
&= (k + \frac{1}{k}) + 2 \\
&= 47 + 2 \\
&= 49
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \sqrt{k} + \frac{1}{\sqrt{k}} = 7$$

Alternatief

We vormen $k+\frac{1}{k}=47$ om tot de vergelijking $k^2-47k+1=0$. Met de strikt positieve oplossing van deze tweedegraadsvergelijking berekenen we de waarde van $\sqrt{k}+\frac{1}{\sqrt{k}}$.

Het is duidelijk dat deze methode wel wat meer rekenwerk vraagt, wat het belang en meerwaarde van het merkwaardig product benadrukt.

Mogelijke differentiatie

- Eenvoudig: Bereken $k^2+\frac{1}{k^2}$ als $k+\frac{1}{k}=5$.
- Complex: Toon aan dat $\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}=\sqrt{k+2}$ als $x+\frac{1}{x}=k$ met $x>0$ en $k\geq 2$.

39 Exponentiële vergelijkingen

Los de vergelijking $2^{4^x}=16^{2^x}$ op zonder gebruik te maken van ICT.

(Antwoord: x = 2)

Mogelijke probleemaanpak / heuristieken

- Rekenen met machten en/of logaritmen

Oplossing

$$\begin{aligned} 2^{4^x}=16^{2^x} &\Leftrightarrow 2^{2^{2x}}=2^{4.2^x} \\ &\Leftrightarrow 2^{2x}=4.2^x \\ &\Leftrightarrow 2^{2x}=2^{x+2} \\ &\Leftrightarrow 2x=x+2 \\ &\Leftrightarrow x=2 \end{aligned}$$

40 Functiewaarde

Gegeven is de functie f waarvoor geldt:

- $f(x)+f(x-1)=x^2$
- $f(11)=50$

Bereken $f(41)$.

(Antwoord: 845)

Mogelijke probleemaanpak / heuristieken

- Herkennen van een patroon (som van een aantal termen van een rekenkundige rij)

Oplossing

$$f(x) = x^2 - f(x-1)$$

$$\begin{aligned} f(41) &= 41^2 - f(40) = 41^2 - 40^2 + f(39) = \ldots = 41^2 - 40^2 + 39^2 - 38^2 + \ldots + 13^2 - 12^2 + f(11) \\ &= \left(41^2 - 40^2\right) + \left(39^2 - 38^2\right) + \ldots + \left(13^2 - 12^2\right) + f(11) \\ &= (41-40)(41+40) + 1.(39+38) + \ldots + 1.(13+12) + f(11) \\ &= 81 + 77 + 73 + \ldots + 25 + f(11) \\ &= \frac{(81+25).15}{2} + f(11) \\ &= 795 + 50 \\ &= 845 \end{aligned}$$

41 Het verschil van twee kwadraten

Gegeven:

- $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 3$
- $x.y = 4$

Gevraagd: bereken de waarde van $x^2 - y^2$.

(Antwoord: 15 of -15)

Mogelijke probleemaanpak / heuristieken

- Herkennen van het verband met gekende leerinhouden (merkwaardige producten, som en product van de oplossingen van een vierkantsvergelijking)

Oplossing

Een mogelijke oplossing:

Door beide leden van de vergelijking $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 3$ te kwadrateren bekomen we na vereenvoudiging $x + y = 5$.

x en y zijn dus de oplossingen van de vergelijking $t^2 - 5t + 4 = 0$. De oplossingen van deze vergelijking zijn 1 en 4, waardoor $x^2 - y^2$ gelijk is aan 15 of -15.

42 Huren van een elektrische step

Twee bedrijven verhuren elektrische steps. Bij bedrijf A betaal je een starttarief van €2,50 en daarna €0,18 per minuut. Bij bedrijf B betaal je €0,25 per minuut zonder starttarief.

Onderzoek in welke situatie elk van de bedrijven het voordeligst is. Formuleer je antwoord en licht je redenering toe.

(Antwoord: t.e.m. minuut 35 bedrijf B, vanaf minuut 36 bedrijf A)

Mogelijke probleemaanpak / heuristieken

- Via een tabel
- Via het opstellen van het voorschrift van de prijsfuncties
    - Interpreteren van beide grafieken
    - Algebraïsch oplossen van een vergelijking of ongelijkheid
- Reflectie: 'Welke aanpak vind jij het meest efficiënt?'

Oplossing

Prijsfunctie van bedrijf A: $P_A(t) = 0{,}18.t + 2{,}5$

Prijsfunctie van bedrijf B: $P_B(t) = 0{,}25.t$

Door het snijpunt van de grafieken van beide prijzenfuncties te bepalen en deze grafieken te interpreteren bekomen we het antwoord.

Opgave met deelvragen

1. Stel voor elk bedrijf een formule op voor de prijs P in functie van het aantal minuten t.
2. Bereken voor een rit van 20 minuten welk bedrijf goedkoper is.
3. Bereken voor een rit van 50 minuten welk bedrijf goedkoper is.
4. Vanaf hoeveel minuten is Bedrijf B voordeliger dan Bedrijf A?
5. Leg uit waarom het nuttig is om een formule op te stellen in plaats van telkens apart te rekenen.

Mogelijke differentiatie

- Eenvoudig: Laat leerlingen enkel de prijzen voor 20 en 50 minuten berekenen.
- Complex: 'Teken beide prijsfuncties in één grafiek en interpreteer het snijpunt.'
- Extra: Laat leerlingen zelf een eigen context bedenken.

43 Intensiteit van verlichting

Een verlichtingsfirma test een puntbronlamp in een donkere testruimte. De lichtintensiteit I daalt omgekeerd evenredig met het kwadraat van de afstand x tot de lamp. Op 5 meter afstand meet men een lichtintensiteit van 100 lux.

Op welke afstand valt de lichtintensiteit terug naar 30 lux?

(Antwoord: 9,13m)

Mogelijke probleemaanpak / heuristieken

- Herkennen van een omgekeerd evenredig verband
- Stel eventueel een formule of functievoorschrift op en vul in.

Oplossing

Het kwadraat van de afstand tot de lamp (= x^2) is omgekeerd evenredig met de lichtintensiteit I. Hierdoor is $I.x^2$ steeds constant. Deze constante is 2500 (=100.5^2).

Hieruit volgt: $30.x^2 = 2500 \Rightarrow x = \sqrt{\frac{250}{3}} = 5.\sqrt{\frac{10}{3}} \approx 9{,}13$

Mogelijke differentiatie

- Eenvoudig: geef de formule $I = \frac{k}{x^2}$.
- Complex: laat leerlingen zelf het verband opstellen.

44 Lichaamslengte versus sprongafstand

Bestaat er een lineair verband tussen lichaamslengte van de leerlingen en hun sprongafstand bij een kangoeroesprong?

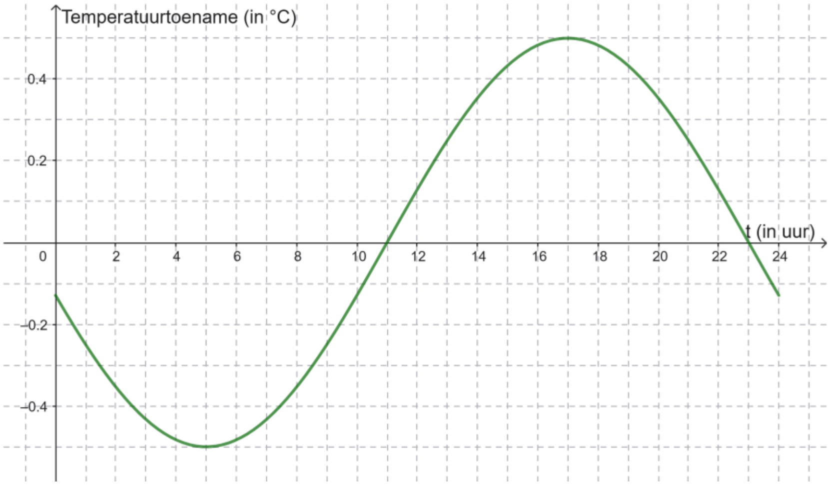
Mogelijke probleemaanpak / heuristieken

- Uitvoeren van metingen
- Gebruiken van ICT zoals GeoGebra om de trendlijn en de correlatiecoëfficiënt te bepalen en te interpreteren.

45 Lichaamstemperatuur

De lichaamstemperatuur van een mens schommelt gedurende de dag rond 37°C. Ze is het laagst rond 5 uur 's ochtends en het hoogst rond 17 uur.

Onderstaande grafiek van de functie met voorschrift $f(x) = \frac{1}{2}.\sin\left[\frac{\pi}{12}(x-11)\right]$ toont de temperatuurschommeling t.o.v. 37°C voor 1 dag (t = 0 komt overeen met middernacht).



1) Op welk tijdstip stijgt de temperatuur het snelst?
2) Waarom schommelt de lichaamstemperatuur doorheen de dag?
3) Hoe zou de grafiek veranderen bij iemand die 's nachts werkt? Welke parameter (a, b of c?) van het voorschrift $f(x) = a.\sin[b(x-c)]$ zou hier veranderen?

(Antwoord: 11 uur ; c = -1)

Mogelijke probleemaanpak

- Leggen van het verband tussen de context en de geziene leerinhouden (kenmerken van de algemene sinusfunctie)

Oplossing

Het buigpunt geeft het antwoord op vraag 1.

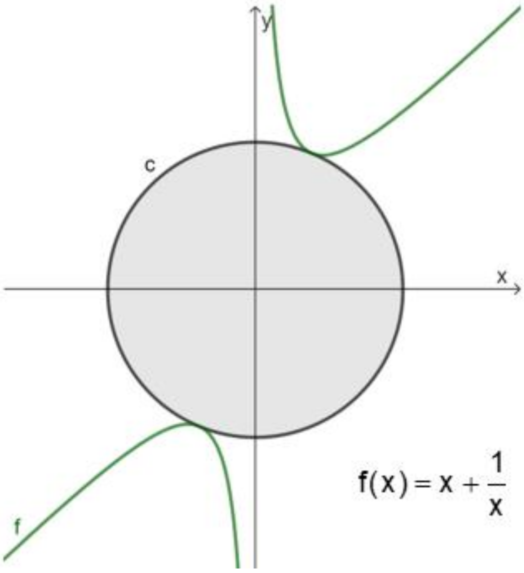
Afhankelijk van de voorkennis van de leerlingen kun je dit buigpunt steunend op symmetrie laten bepalen of via afgeleiden laten berekenen.

Mogelijke differentiatie

- Eenvoudig: Vraag enkel om de grafiek te interpreteren.
- Complex: Geef enkel de grafiek en vraag ook om het voorschrift op te stellen.

46 Oppervlakte van een cirkel

Bereken de oppervlakte van de cirkel c met de oorsprong als middelpunt en die de grafiek van de functie f raakt.



(Antwoord: $2\pi(1+\sqrt{2})$)

Mogelijke probleemaanpak

Zie https://pro.katholiekonderwijs.vlaanderen/klasklare-inspiratie-voor-wiskunde

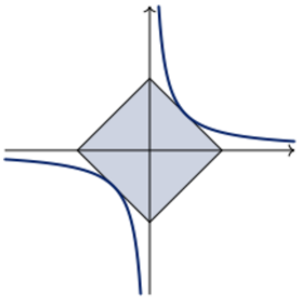
(Artikel: voorbeeld – oppervlakte van een rakende cirkel)

47 Oppervlakte van een vierkant

De hoekpunten van een vierkant liggen op de coördinaatassen. Bovendien raken twee zijden van dat vierkant aan de kromme met vergelijking $y = \frac{1}{x}$ zoals in de figuur.

Wat is de oppervlakte van dat vierkant?

(Bron: VWO 2024 Tweede ronde)



(Antwoord: 8)

Mogelijke probleemaanpak / heuristieken

- Herkennen van het verband met het begrip afgeleide

Oplossing

De raakpunten van de hyperbool met het vierkant, zijn de punten van de hyperbool waar de helling (afgeleide) -1 is.

- $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right) = -1 \Leftrightarrow -\frac{1}{x^2} = -1 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = -1 \vee x = 1$
- De coördinaten van de raakpunten zijn $(-1,-1)$ en $(1,1)$.
- Zijde van het vierkant $= z = \sqrt{(1+1)^2 + (1+1)^2} = \sqrt{8}$

De oppervlakte van het vierkant is dus gelijk aan 8.

DE OPGAVE ANDERS BEKEKEN

Mogelijke probleemaanpak / heuristieken

- Herkennen van symmetrie
- Inzien dat de raakpunten op de eerste deellijn liggen

Oplossing

De raakpunten van de hyperbool met het vierkant zijn de snijpunten van de eerste deellijn met deze hyperbool.

- $\frac{1}{x} = x \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = -1 \vee x = 1$
- De coördinaten van de raakpunten zijn $(-1,-1)$ en $(1,1)$.
- Zijde van het vierkant $= z = \sqrt{(1+1)^2 + (1+1)^2} = \sqrt{8}$

De oppervlakte van het vierkant is dus gelijk aan 8.

48 Parabolische brugboog

Een ontwerpwedstrijd voor een voetgangersbrug vraagt een boog die esthetisch en functioneel is. De boog heeft een parabolische vorm en metingen geven ons de coördinaten in meter van drie punten op de boog: $(-10,3)$, $(0,8)$ en $(10,3)$. De x-as stelt de horizontale overspanning voor en de y-as de hoogte.

Bepaal het aantal meter (horizontale afstand) onder de brug dat de hoogte minstens 5 meter is. Dit is nodig om de onderdoorgang te garanderen.

(Antwoord: 15,49m)

Mogelijke probleemaanpak / heuristieken

- Schetsen van de parabool
- Gebruiken van het meest geschikte voorschrift van een tweedegraadsfunctie: $f(x) = a.x^2 + b.x + c$, $f(x) = a.(x-p)^2 + q$ of $f(x) = a.(x-x_1)(x-x_2)$
- Oplossen van de ongelijkheid $f(x) \geq 5$
- Maken van de grafiek met ICT om de vraag grafisch op te lossen of als controle na een algebraïsche benadering

Oplossing

Uit de coördinaten van de gegeven punten (symmetrie) leiden we af dat het punt met coördinaten (0,8) de top is.

Het voorschrift van de gezocht functie is dus $f(x) = a.x^2 + 8$.

We vinden uiteindelijk $f(x) = -\frac{1}{20}.x^2 + 8$.

De ongelijkheid $f(x) \geq 5$ geeft ons het antwoord op de vraag.

De hoogte onder de brug is over een afstand van 15,49 meter ($= 2.\sqrt{60}$) minstens 5 meter.

Mogelijke differentiatie

- Eenvoudig:
    - Visueel: Voeg een schets van de brug toe aan de opgave.
    - Geef het voorschrift van de parabool.
    - Stel deelvragen.
- Complex: geef drie andere punten die een ‘moeilijker’ voorschrift opleveren.

49 Populatie ooievaars in Vlaanderen

Tijdens een excursie naar het natuurgebied "De Blankaart" verneem je meer over de groeiende populatie ooievaars in Vlaanderen. Zo werden er 157 broedparen geteld in 2021 en 206 broedparen in 2023. In 2025 steeg dit aantal verder naar 277.

1) Stel een model op dat de groei van de populatie beschrijft.
2) Gebruik het model om te schatten in welk jaar er voor het eerst meer dan 500 broedparen zullen zijn.
3) Blijft dit model realistisch om de populatie in de toekomst te blijven schatten? Verklaar jouw antwoord.

(Antwoord: $f(t) = 157.\sqrt[4]{277/157}^{\,t}$; 2030)

Mogelijke probleemaanpak / heuristieken

- Herkennen van het groeimodel (exponentiële groei)

Oplossing

Met het gegeven aantal broedparen in 2021, 2023 en 2025 kan nagegaan worden dat de populatiegroei nagenoeg exponentieel verloopt. Door het opstellen van de verwante exponentiële functie kunnen we ook het antwoord op vraag 2 vinden.

We hebben hier het aantal broedparen in 2021 en 2025 gebruikt om de groeifactor per jaar te bepalen.

Bij vraag 3 kun je leerlingen laten nadenken over mogelijke redenen waarom deze exponentiële groei op termijn niet realistisch blijft. Je kan eventueel de link leggen met logistische groei.

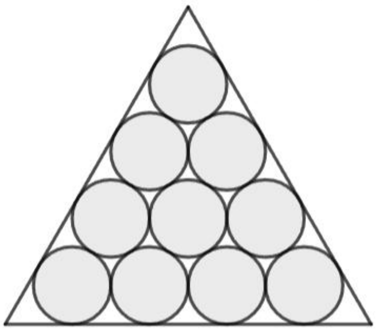
Mogelijke differentiatie

- Eenvoudig: Vraag om een exponentiële functie op te stellen die deze populatie beschrijft.
- Complex: open vraag – Vraag enkel naar een beredeneerde schatting van het jaar waarin er voor het eerst meer dan 500 broedparen zullen zijn.

50 Rijen van cirkels

We stapelen n rijen cirkels zoals in onderstaande figuur.

$Voorbeeld: \ 4 \ rijen \ cirkels \ (n = 4)$



Bereken $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{A_n}{A}$.

Hierbij is A de oppervlakte van de driehoek en A_n de oppervlakte van alle cirkels samen. Het aantal rijen cirkels is gelijk aan n.

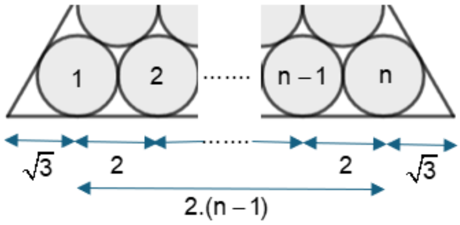
(Antwoord: $\frac{\pi}{2\sqrt{3}}$)

Mogelijke probleemaanpak

- Inzien dat we als straal van de cirkels 1 mogen kiezen (Gelijkvormige figuren behouden de verhouding.)
- Proberen met 1 of 2 eenvoudige gevallen (A_2/A en/of A_3/A) en veralgemenen naar n rijen van cirkels
- Opsplitsen in deelproblemen

Oplossing

- Oppervlakte van de cirkels ($= A_n$):
    - Aantal cirkels: $1+2+3+\ldots+n=\frac{(1+n)n}{2}$
    - $A_n = \frac{(1+n)n}{2}.\pi = \frac{n^2+n}{2}.\pi$
- Oppervlakte van de gelijkzijdige driehoek (= A):
    - Zijde $z = 2(n-1)+2\sqrt{3} = 2(n-1+\sqrt{3})$



    - Hoogte $h = \sqrt{z^2 - \frac{z^2}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}z$
    - $A = \frac{\sqrt{3}}{4}z^2 = \sqrt{3}.(n-1+\sqrt{3})^2$
- $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{A_n}{A} = \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{(n^2+n).\pi}{2\sqrt{3}.(n-1+\sqrt{3})^2} = \frac{\pi}{2\sqrt{3}}$

Mogelijke differentiatie

- Eenvoudig: Vraag in één specifiek geval naar de oppervlakte van de gestapelde cirkels.

51 Tweede afgeleide

Gegeven:

- De functie f is continu in $\mathbb{R}$
- De functie g met voorschrift $g(x) = (1-x)\int_0^x t.f(t)dt + x\int_x^0 (1-t)f(t)dt$

Bereken g''(x).

(Antwoord: -f(x))

Mogelijke probleemaanpak / heuristieken

- Toepassen van de hoofdstelling van de integraalrekening.

Oplossing

$$g(x) = (1-x)\int_0^x t.f(t)dt + x\int_x^0 (1-t)f(t)\,dt$$

$$= \int_0^x t.f(t)dt - x\int_0^x t.f(t)dt + x\int_x^0 f(t)dt - x\int_x^0 t.f(t)dt$$

$$= \int_0^x t.f(t)dt - \cancel{x\int_0^x t.f(t)dt} - x\int_0^x f(t)dt + \cancel{x\int_0^x t.f(t)dt}$$

$$= \int_0^x t.f(t)dt - x\int_0^x f(t)dt$$

$$g'(x) = x.f(x) - \left(x.f(x) + \int_0^x f(t)dt\right)$$

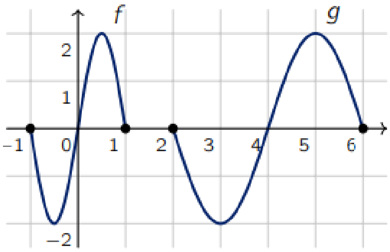
$$= -\int_0^x f(t)dt$$

$$g''(x) = -f(x)$$

52 Transformaties van functies

In de figuur zie je de grafieken van twee functies f en g.

Welk verband geldt er tussen de functievoorschriften?



(A) $g(x) = f(2x+4)$ (B) $g(x) = f(2x+2)$ (C) $g(x) = f(2x-2)$

(D) $g(x) = f(\frac{1}{2}x - 2)$ (E) $g(x) = f(\frac{1}{2}x + 2)$

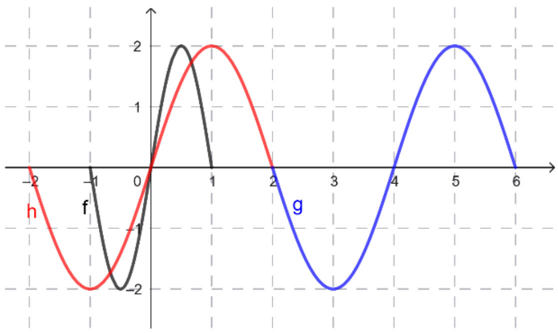
(Bron: VWO 2025 Eerste ronde)

(Antwoord: D)

Mogelijke probleemaanpak / heuristieken

- Herkennen van geziene transformaties bij algemene sinusfuncties
- Schetsen van de grafiek van functies

Oplossing



- We bepalen het voorschrift van de functie h die ontstaat door de grafiek van f horizontaal met een factor 2 uit te rekken.
  - De functie h met voorschrift $h(x) = f(\frac{1}{2}x)$ heeft [-2,2] al domein.
- De grafiek van g ontstaat door de grafiek van h 4 eenheden naar rechts te verschuiven.
  - $g(x) = h(x-4) = f(\frac{1}{2}(x-4)) = f(\frac{1}{2}x - 2)$
- Antwoord D is juist.

Mogelijke differentiatie

- Eenvoudig: Je kan expliciet met voorschriften van algemene sinusfuncties werken.

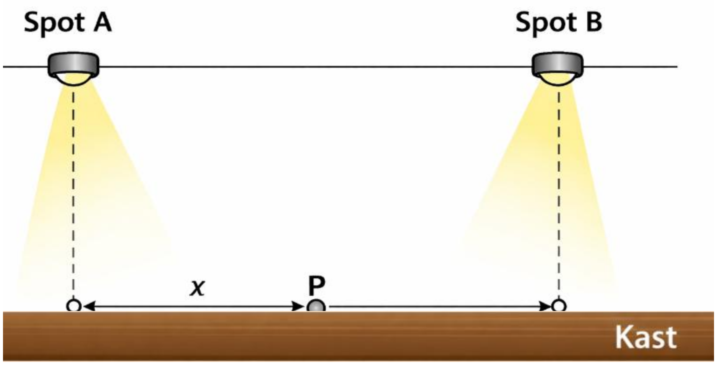
53 Verlichtingssterkte

Exact 1 meter boven het horizontale bovenvlak van een kast hangen twee identieke lichtspots A en B. De spots hangen horizontaal 2 meter van elkaar.

Voor elke lichtspot geldt dat de verlichtingssterkte E in een punt omgekeerd evenredig is met het kwadraat van de afstand tot die spot.

Concreet geldt voor elke spot $E(d)=\frac{170}{d^2}$, waarbij E wordt uitgedrukt in lux en d in meter.

We bekijken een punt P op de kast dat ligt in het verticale vlak door A en B, en tussen de loodrechte projecties van beide spots op de kast.



Laat x (in meter) de horizontale afstand zijn van punt P tot de loodrechte projectie van spot A op de kast.

De totale verlichtingssterkte E_{tot} in punt P is gelijk aan de som van de verlichtingssterktes veroorzaakt door spot A en spot B.

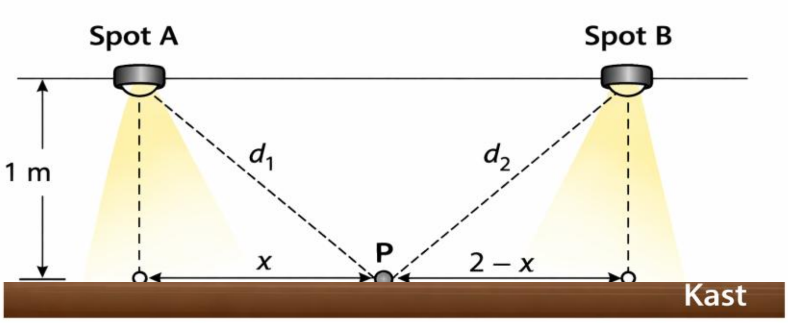
Voor welke waarde van x is de totale verlichtingssterkte in P minimaal? En voor welke x-waarde is die maximaal?

(Antwoord: min voor x=1m, max voor x=0,09m en x=1,91m)

Mogelijke probleemaanpak / heuristieken

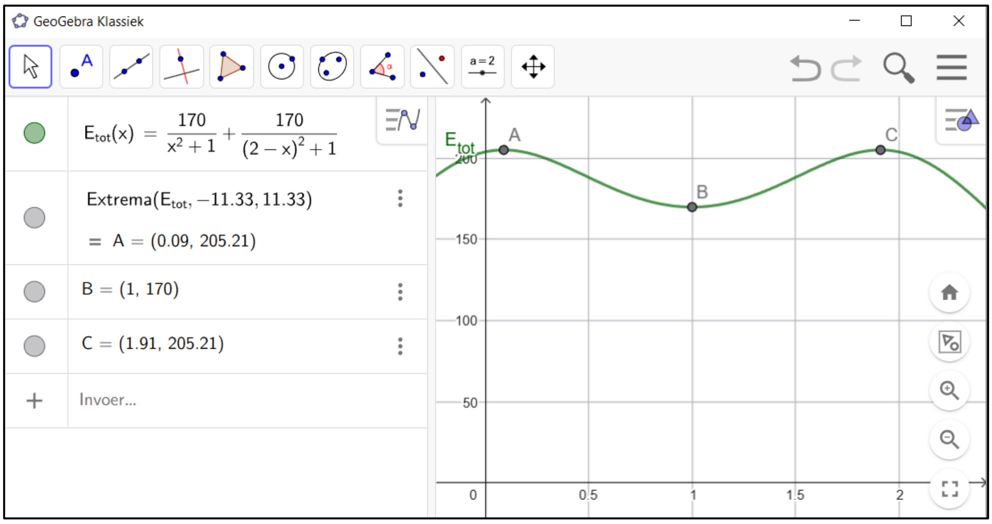
- Alle nodige afstanden aanduiden op de figuur
- Opstellen van een functievoorschrift
- Bepalen van extreme waarden van een functie met behulp van ICT

Oplossing



$$E_{tot}=\frac{170}{d_1^2}+\frac{170}{d_2^2} \text{ met } d_1^2=x^2+1 \text{ en } d_2^2=(2-x)^2+1$$

$$\Rightarrow E_{tot}(x)=\frac{170}{x^2+1}+\frac{170}{(2-x)^2+1} \text{ met } 0\le x\le 2$$



De totale verlichtingssterkte is minimaal voor $x = 1\text{m}$ (het midden) en maximaal voor $x = 0{,}09\text{m}$ en $x = 1{,}91\text{m}$.

Mogelijke differentiatie

- Eenvoudig:
  - Geef een figuur waarop alle gegevens aangeduid zijn.
  - Formuleer de opgave met eenvoudiger taal en minder doorlopende tekst. Gebruik bullets.
  - Geef het voorschrift van de functie die de totale verlichtingssterkte beschrijft.
  - Vermeld bij de vraagstelling expliciet de begrenzing $0 \le x \le 2$.
- Complex: formuleer de opgave zonder figuur.

54 Verspreiding van een filmpje op TikTok

Een kort filmpje over een schoolproject wordt op TikTok geplaatst. De eerste dag heeft het 200 weergaven, twee dagen later 900.

1) Hoe zal het aantal weergaven volgens jou verder toenemen als dit tempo aanhoudt? Verklaar jouw antwoord.
2) Wanneer bereikt het filmpje volgens jouw groeimodel 10 000 weergaven?
3) Leg uit waarom het model niet altijd geldig blijft.

(Antwoord: $f(t) = 200.\sqrt{9/2}^{\,t}$; 6^{de} dag)

Mogelijke probleemaanpak

- Herkennen van het groeimodel (exponentiële groei)
- Mathematiseren – Vertalen van de context naar geziene leerinhouden

Oplossing

Met het gegeven aantal weergaven kunnen we het voorschrift van de exponentiële functie opstellen die deze toename beschrijft. Met dit functievoorschrift kunnen we ook het antwoord op vraag 2 vinden.

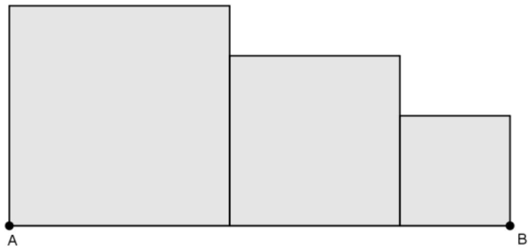
Bij vraag 3 kun je leerlingen laten nadenken over mogelijke redenen waarom deze exponentiële groei op termijn niet realistisch blijft.

Mogelijke differentiatie

- Eenvoudig: Geef dat het aantal weergaven exponentieel zal toenemen en vraag enkel naar het aantal weergaven na 7 dagen.
- Complex: Laat leerlingen informatie over logistische groei opzoeken.

55 Vierkanten

Het lijnstuk [AB] is 60cm lang. Hierop worden 3 vierkanten getekend zoals op onderstaande figuur.



We weten dat de zijde van het eerste vierkant dubbel zo lang is als de zijde van het derde vierkant.

Bereken de lengte van de zijde van elk van deze drie vierkanten, opdat de oppervlakte van de drie vierkanten samen zo klein mogelijk zou zijn.

(Antwoord: 25,71cm, 21,43cm en 12,86cm)

Mogelijke probleemaanpak / heuristieken

- Op de figuur de gegevens aanduiden
- Opsplitsen van het probleem in deelproblemen
- Opstellen van een functievoorschrift

Mogelijke differentiatie

- Eenvoudig:
  - Geef het voorschrift van de oppervlaktefunctie A(z).
  - Formuleer de vraag met deelvragen.
  - Pas het gegeven aan: de zijde van het derde vierkant is 10cm lang.

Opgave met deelvragen

1. Stel *z* de zijde van het derde vierkant. Wat zijn dan de zijden van het eerste en het tweede vierkant?
2. Toon aan dat de oppervlakte A(z) van de drie vierkanten gelijk is aan $14z^2 - 360z + 3600$.
3. Bepaal z zodat de oppervlakte A(z) minimaal is.
4. Hoe lang is de zijde van elk vierkant dan?

DEEL 7 LOGICA, TELPROBLEMEN EN KANSBEREKENING

56 Afspraak onder de stationsklok

Bart en Sofie hebben afgesproken onder de stationsklok. Onafhankelijk van elkaar komen ze op een willekeurig moment tussen 11 uur en 12 uur op de afgesproken plaats. Sofie wacht niet langer dan een kwartier en Bart is precies even (on)geduldig. Hoe groot is de kans dat Bart en Sofie elkaar ontmoeten?

(Antwoord: 7/16)

Mogelijke probleemaanpak

- Maken van een grafische voorstelling
- Beschouwen van enkele concrete situaties

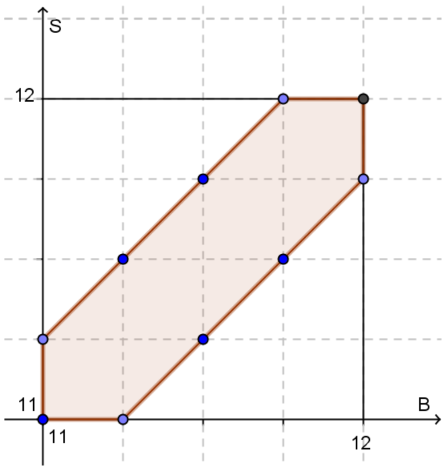
Oplossing

Elk mogelijk aankomstuur van Bart stellen we voor op de x-as, elk mogelijk aankomstuur van Sofie op de y-as. Een punt in het vlak stelt dus een concrete situatie voor: de x-coördinaat is het uur dat Bart aankomt en de y-coördinaat het uur dat Sofie toekomt.

We proberen nu het gebied te tekenen waarvan de punten een situatie beschrijven waarin Bart en Sofie elkaar ontmoeten. We geven enkele voorbeelden:

- Als Bart om 11 uur aan, dan moet Sofie tussen 11 uur tot 11.15 uur min aankomen.
- Als Bart om 11.15 uur aankomt, dan moet Sofie tussen 11 uur en 11.30 uur aankomen.
- Als Bart om 11.30 uur aankomt, dan moet Sofie tussen 11.15 uur en 11.45 uur aankomen.
- Als Bart om 11.45 uur aankomt, dan moet Sofie tussen 11.30 uur en 12 uur aankomen.
- Als Bart om 12 uur aankomt, dan moet Sofie tussen 11.15 uur en 12 uur aankomen.

Het ‘gunstige’ gebied kunnen we dus voorstellen met onderstaande gekleurde zeshoek.



Met behulp van deze figuur kunnen we de kans dat Bart en Sofie elkaar ontmoeten berekenen.

$$\text{Kans} = \frac{A_{\text{zeshoek}}}{A_{\text{vierkant}}} = \ldots = \frac{7}{16}$$

57 Basketbal

Er is een nieuwe basketbalcompetitie opgericht met zeven ploegen: de Antilopen, de Beren, de Cheetahs, de Draken, de Ezels, de Flamingo's en de Geiten. Ieder team moet drie wedstrijden spelen tegen elke andere ploeg.

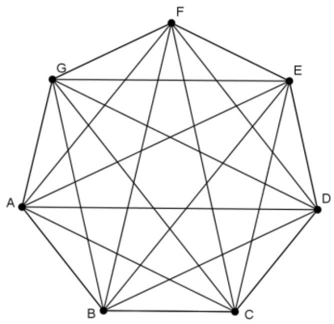
Hoeveel wedstrijden worden er in totaal gespeeld?

(Antwoord: 63)

Mogelijke probleemaanpak / heuristieken

- Maken een schematische voorstelling (graaf)

Oplossing



Aantal wedstrijden = 3.(6+5+4+3+2+1) = 63

Mogelijke differentiatie

- Complex: Vraag naar een algemene formule voor het aantal wedstrijden als er n ploegen aan de competitie deelnemen.

58 Een logische schakeling

Een eenvoudige logische schakeling voor een signaallicht werkt als $(A \wedge \neg B) \vee C$ waar is.

De ontwerper wil alle situaties testen en wil nagaan of deze uitdrukking kan herschreven worden als $(A \vee C) \wedge (\neg B \vee C)$.

Ga na of beide uitdrukkingen equivalent zijn.

(Antwoord: ja)

Mogelijke probleemaanpak / heuristieken

- Opstellen van waarheidstabellen

Oplossing

A	B	C	$\neg B$	$A \wedge \neg B$	$(A \wedge \neg B) \vee C$	$A \vee C$	$\neg B \vee C$	$(A \vee C) \wedge (\neg B \vee C)$
1	1	1	0	0	1	1	1	1
1	1	0	0	0	0	1	0	0
1	0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	1	1	1	1
0	1	1	0	0	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	0	1	1	1	1
0	0	0	1	0	0	0	1	0

Uit de waarheidstabel leiden we af dat beide logische uitspraken equivalent zijn.

De logische uitspraak $(A \wedge \neg B) \vee C \Leftrightarrow (A \vee C) \wedge (\neg B \vee C)$ is dus een tautologie.

59 Ontbrekende pagina's

Marthe leest een boek. Plots merkt ze dat er bladzijden ontbreken, want onmiddellijk na bladzijde 135 komt bladzijde 173.

Hoeveel bladzijden ontbreken er?

(Antwoord: 37)

Mogelijke probleemaanpak / heuristieken

- Werken met eenvoudiger getallen: vb. na bladzijde 3 komt bladzijde 7

Oplossing

Bij een sprong van bladzijde 3 naar 7 ontbreken er 3 pagina's: 3 = 7-3+1.

Je kan het aantal ontbrekende bladzijden nog bij één of twee eenvoudige voorbeelden berekenen totdat de leerlingen het systeem herkend hebben.

Bij een sprong van bladzijde 135 naar 173 ontbreken er dus 173-135+1 = 37 pagina's.

Mogelijke differentiatie

- Complex: Vraag naar een algemene formule voor het aantal ontbrekende pagina's bij een sprong van bladzijde p naar bladzijde q.

60 Verplichte literatuur

Voor het vak Nederlands moet je vijf van de volgende zes boeken uitkiezen om te lezen: 'Kruistocht in spijkerbroek', 'Het Engelenhuis', 'De jongen in de gestreepte pyjama', 'Gegijzeld', 'Splinters', 'De kunstrijder'.

Hoeveel verschillende reeksen van vijf boeken kan je kiezen?

(Antwoord: 6)

Mogelijke probleemaanpak / heuristieken

- Blikwissel: *vijf boeken kiezen uit een reeks van zes komt overeen met één boek opzij leggen dat je niet gaat lezen.*

Mogelijke differentiatie

- Complex: Laat de opgave zowel met als zonder belang van volgorde (ordening) oplossen.