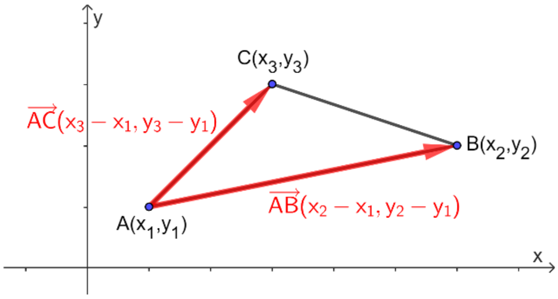
Dienst Curriculum & vorming
Team secundair onderwijs
Guimardstraat 1 - 1040 BRUSSEL
www.katholiekonderwijs.vlaanderen

Toepassingen op determinanten in de meetkunde - Bijlage 1
De oppervlakte van een driehoek
2024-09-01

1 Het berekenen van de oppervlakte van een driehoek met determinanten

De oppervlakte van de driehoek ABC met $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$ en $C(x_3,y_3)$ kan met onderstaande formule worden berekend.

$$A_{\Delta ABC} = \pm\frac{1}{2}.\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix}$$



De rijen van de determinant zijn de coördinaten van $\overrightarrow{AB}$ en $\overrightarrow{AC}$.

Aangezien de oppervlakte steeds positief is, hangt het teken af van het teken van de determinant.

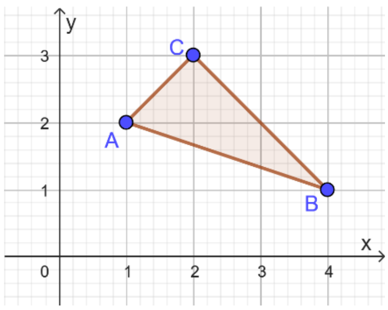
<u>Opmerking</u>

We kunnen deze oppervlakte ook met de formule $A_{\Delta ABC} = \pm\frac{1}{2}.\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$ berekenen.

Steunend op de eigenschappen van determinanten en het ontwikkelen van een determinant naar de eerste rij krijgen we immers:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \overset{\substack{R_2 - R_1 \\ R_3 - R_1}}{=} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & 0 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix}$$

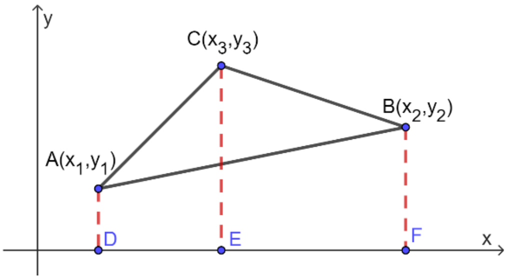
<u>Voorbeeld</u>: *'Bereken de oppervlakte van de driehoek ABC met A(1,2), B(4,1) en C(2,3).'*



- $\overrightarrow{AB}(3,-1)$ en $\overrightarrow{AC}(1,1)$
- $\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 + 1 = 4$
- $A_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}.4 = 2$

2 Bewijs m.b.v. trapezia

We tonen deze formule aan voor het geval dat de driehoek ligt zoals op de afbeelding ($x_1 < x_3 < x_2$ en $y_1 < y_2 < y_3$). Dit is dus geen algemeen bewijs.



We kunnen de oppervlakte van de driehoek ABC berekenen met behulp van drie trapezia.

$$A_{\Delta ABC} = A_{\text{trapezium ADEC}} + A_{\text{trapezium BCEF}} - A_{\text{trapezium ADFB}}$$

- $A_{\text{trapezium ADEC}} = \dfrac{(b+B).h}{2} = \dfrac{(y_1+y_3).(x_3-x_1)}{2} = \dfrac{x_3y_1 - x_1y_1 + x_3y_3 - x_1y_3}{2}$
- $A_{\text{trapezium BCEF}} = \dfrac{(b+B).h}{2} = \dfrac{(y_2+y_3).(x_2-x_3)}{2} = \dfrac{x_2y_2 - x_3y_2 + x_2y_3 - x_3y_3}{2}$
- $A_{\text{trapezium ADFB}} = \dfrac{(b+B).h}{2} = \dfrac{(y_1+y_2).(x_2-x_1)}{2} = \dfrac{x_2y_1 - x_1y_1 + x_2y_2 - x_1y_2}{2}$

We bekomen:

$$\begin{aligned}
A_{\Delta ABC} &= A_{\text{trapezium ADEC}} + A_{\text{trapezium BCEF}} - A_{\text{trapezium ADFB}} \\
&= \frac{(x_3y_1 - x_1y_1 + x_3y_3 - x_1y_3) + (x_2y_2 - x_3y_2 + x_2y_3 - x_3y_3) - (x_2y_1 - x_1y_1 + x_2y_2 - x_1y_2)}{2} \\
&= \frac{x_3y_1 - \cancel{x_1y_1} + \cancel{x_3y_3} - x_1y_3 + \cancel{x_2y_2} - x_3y_2 + x_2y_3 - \cancel{x_3y_3} - x_2y_1 + \cancel{x_1y_1} - \cancel{x_2y_2} + x_1y_2}{2} \\
&= \frac{x_3y_1 - x_1y_3 - x_3y_2 + x_2y_3 - x_2y_1 + x_1y_2}{2} \qquad (1)
\end{aligned}$$

We berekenen nu $\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix}$.

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix} &= (x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1) \\
&= x_2y_3 - x_2y_1 - x_1y_3 + \cancel{x_1y_1} - x_3y_2 + x_3y_1 + x_1y_2 - \cancel{x_1y_1} \\
&= x_2y_3 - x_2y_1 - x_1y_3 - x_3y_2 + x_3y_1 + x_1y_2 \qquad (2)
\end{aligned}$$

Als we uitdrukking (1) en (2) vergelijken, bekomen we voor dit concreet geval:

$$A_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}.\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix}$$

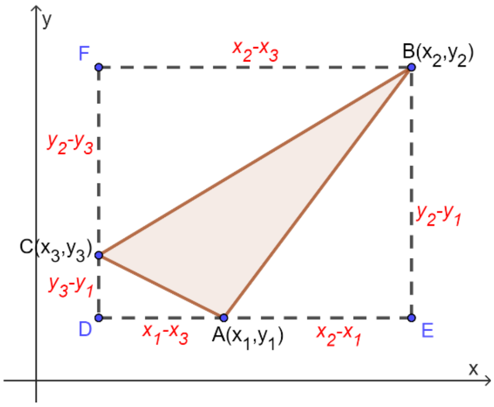
Indien we echter de twee rijen van de determinant omwisselen, bekomen we het tegengestelde van dit resultaat. Er geldt dus:

$$A_{\Delta ABC} = \pm\frac{1}{2}.\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix}$$

3 Bewijs m.b.v. rechthoekige driehoeken

We tonen deze formule aan voor het geval dat de driehoek ligt zoals op de afbeelding ($x_3 < x_1 < x_2$ en $y_1 < y_3 < y_2$). Dit is dus geen algemeen bewijs.

We kunnen de oppervlakte van de driehoek ABC berekenen met behulp van een rechthoek en drie rechthoekige driehoeken.



$$A_{\Delta ABC} = A_{\square DEBF} - A_{\Delta AEB} - A_{\Delta ACD} - A_{\Delta BFC})$$

- $A_{\square DEBF} = (x_2 - x_3)(y_2 - y_1) = x_2y_2 - x_2y_1 - x_3y_2 + x_3y_1$
- $A_{\Delta AEB} = \dfrac{(x_2 - x_1)(y_2 - y_1)}{2} = \dfrac{x_2y_2 - x_2y_1 - x_1y_2 + x_1y_1}{2}$
- $A_{\Delta ACD} = \dfrac{(x_1 - x_3)(y_3 - y_1)}{2} = \dfrac{x_1y_3 - x_1y_1 - x_3y_3 + x_3y_1}{2}$
- $A_{\Delta BFC} = \dfrac{(x_2 - x_3)(y_2 - y_3)}{2} = \dfrac{x_2y_2 - x_2y_3 - x_3y_2 + x_3y_3}{2}$

We bekomen:

$$\begin{aligned}
A_{\Delta AEB} + A_{\Delta ACD} + A_{\Delta BFC} &= \frac{x_2y_2 - x_2y_1 - x_1y_2 + \cancel{x_1y_1}}{2} + \frac{x_1y_3 - \cancel{x_1y_1} - \cancel{x_3y_3} + x_3y_1}{2} + \frac{x_2y_2 - x_2y_3 - x_3y_2 + \cancel{x_3y_3}}{2} \\
&= \frac{2x_2y_2 - x_2y_1 - x_1y_2 + x_1y_3 + x_3y_1 - x_2y_3 - x_3y_2}{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_{\Delta ABC} &= A_{\square DEBF} - A_{\Delta AEB} - A_{\Delta ACD} - A_{\Delta BFC} \\
&= x_2y_2 - x_2y_1 - x_3y_2 + x_3y_1 - \frac{2x_2y_2 - x_2y_1 - x_1y_2 + x_1y_3 + x_3y_1 - x_2y_3 - x_3y_2}{2} \\
&= \frac{2\cancel{x_2y_2} - 2x_2y_1 - 2x_3y_2 + 2x_3y_1 - 2\cancel{x_2y_2} + x_2y_1 + x_1y_2 - x_1y_3 - x_3y_1 + x_2y_3 + x_3y_2}{2} \\
&= \frac{-x_2y_1 - x_3y_2 + x_3y_1 + x_1y_2 - x_1y_3 + x_2y_3}{2} \qquad (1)
\end{aligned}$$

We berekenen nu $\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix}$.

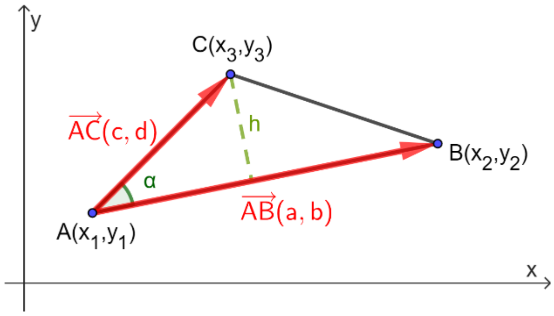
$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix} &= (x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1) \\
&= x_2y_3 - x_2y_1 - x_1y_3 + \cancel{x_1y_1} - x_3y_2 + x_3y_1 + x_1y_2 - \cancel{x_1y_1} \\
&= x_2y_3 - x_2y_1 - x_1y_3 - x_3y_2 + x_3y_1 + x_1y_2 \qquad (2)
\end{aligned}$$

Als we uitdrukking (1) en (2) vergelijken, bekomen we voor dit concreet geval:

$$A_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix}$$

Indien we echter de twee rijen van de determinant omwisselen, bekomen we het tegengestelde van dit resultaat. Er geldt dus: $A_{\Delta ABC} = \pm\dfrac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix}$

4 Bewijs m.b.v. vectoren



Om het rekenwerk wat te vereenvoudigen stellen we $a = x_2 - x_1$, $b = y_2 - y_1$, $c = x_3 - x_1$ en $d = y_3 - y_1$.

We kunnen de te bewijzen formule herschrijven als:

$$A_{\Delta ABC} = \pm\frac{1}{2}.\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

We berekenen eerst $\sin\alpha$ en $\cos\alpha$.

- $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \left\|\overrightarrow{AB}\right\|.\left\|\overrightarrow{AC}\right\|.\cos\alpha$

$$\Rightarrow \quad \cos\alpha = \frac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}{\left\|\overrightarrow{AB}\right\|.\left\|\overrightarrow{AC}\right\|} \qquad (1)$$

- $\sin\alpha = \dfrac{h}{|AC|} \quad \Rightarrow \quad h = \left\|\overrightarrow{AC}\right\|.\sin\alpha \qquad (2)$

Uit (2) volgt: $A_{\Delta ABC} = \dfrac{b.h}{2} = \dfrac{1}{2}.\left\|\overrightarrow{AB}\right\|.\left\|\overrightarrow{AC}\right\|.\sin\alpha$

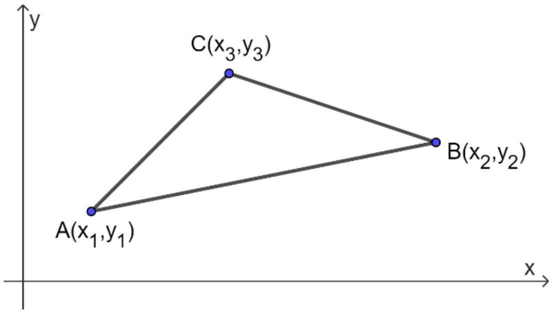
Om de hoek α met behulp van de grondformule van de goniometrie te elimineren, berekenen we het kwadraat van de oppervlakte van de driehoek ABC.

$$\begin{aligned}
\left(A_{\Delta ABC}\right)^2 &= \frac{1}{4}.\left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2.\left\|\overrightarrow{AC}\right\|^2.\sin^2\alpha \\
&= \frac{1}{4}.\left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2.\left\|\overrightarrow{AC}\right\|^2.\left(1-\cos^2\alpha\right) \\
&= \frac{1}{4}.\left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2.\left\|\overrightarrow{AC}\right\|^2.\left(1-\frac{\left(\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}\right)^2}{\left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2.\left\|\overrightarrow{AC}\right\|^2}\right) \\
&= \frac{1}{4}\left(\left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2.\left\|\overrightarrow{AC}\right\|^2-\left(\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}\right)^2\right) \\
&= \frac{1}{4}\left(\left(a^2+b^2\right).\left(c^2+d^2\right)-\left(ac+bd\right)^2\right) \\
&= \frac{1}{4}\left(\cancel{a^2c^2}+a^2d^2+b^2c^2+\cancel{b^2d^2}-\cancel{a^2c^2}-2.abcd-\cancel{b^2d^2}\right) \\
&= \frac{1}{4}\left(ad-bc\right)^2 \\
&= \frac{1}{4}.\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}^2
\end{aligned}$$

Hieruit volgt:

$$A_{\Delta ABC} = \pm\frac{1}{2}.\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

5 Bewijs m.b.v. de formule voor afstand van een punt tot een rechte



We stellen een cartesische vergelijking van de rechte AC op.

$$AC \leftrightarrow \begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix} = 0$$

We bekomen:

$$AC \leftrightarrow (y_3 - y_1).(x - x_1) - (x_3 - x_1).(y - y_1) = 0$$

Door te steunen op de formule $d(P,l) = \frac{|u.x_1 + v.y_1 + w|}{\sqrt{u^2 + v^2}}$ met $P(x_1, y_1)$ en $l \leftrightarrow u.x + v.y + w = 0$ kunnen we de oppervlakte van driehoek ABC berekenen.

$$\begin{aligned}
A_{\triangle ABC} &= \frac{b.h}{2} \\
&= \frac{1}{2}.|AC|.d(B, AC) \\
&= \frac{1}{2}.\sqrt{(x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2}.\frac{|(y_3 - y_1)(x_2 - x_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)|}{\sqrt{(x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2}} \\
&= \pm\frac{1}{2}.\left((y_3 - y_1)(x_2 - x_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)\right) \\
&= \pm\frac{1}{2}.\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix}
\end{aligned}$$