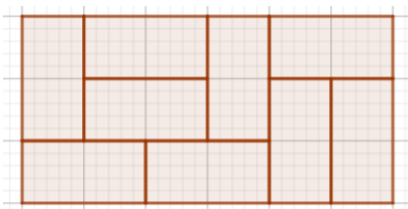


Vlakkvullingen van een rechthoek – Bijlage 1

2025-06-01

1 Het aantal vlakkvullingen van een $3 \times 2n$ -rechthoek met 1×2 -tegels

Onder een $3 \times 2n$ -rechthoek verstaan we een rechthoek met lengte $2n$ en breedte 3. We betegelen deze met 1×2 -tegels. Elke mogelijke betegeling noemen we een vlakkvulling van de $3 \times 2n$ -rechthoek. Op de afbeelding zie je een mogelijke vlakkvulling van een 3×6 -rechthoek.

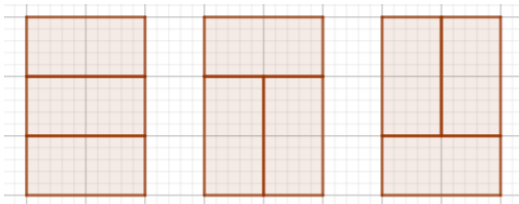


Het aantal vlakkvullingen $T(n)$ van een $3 \times 2n$ -rechthoek met 1×2 -tegels kan met volgende formule berekend worden:

$$T(n) = 4 \cdot T(n-1) - T(n-2) \text{ voor } n > 2 \text{ met } T(1) = 3 \text{ en } T(2) = 11$$

We tonen dit aan.

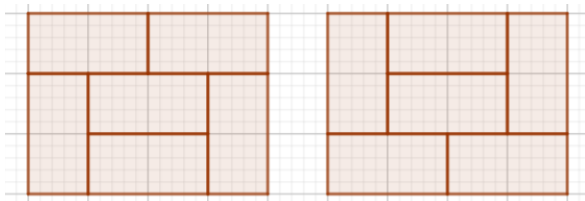
Voor $n = 1$ is het duidelijk dat er 3 mogelijke vlakkvullingen zijn, dus: $T(1) = 3$.



Voor $n = 2$ zoeken we het aantal vlakkvullingen van een 3×4 -rechthoek.

De eerste twee kolommen kunnen we op 3 manier betegelen. Dit volgt uit het geval $n = 1$. Voor elk van deze drie gevallen vinden we drie verschillende vlakkvullingen voor de laatste twee kolommen. Zo vinden we al 9 vlakkvullingen van een 3×4 -rechthoek waarbij er geen overlap is tussen de tweede en derde kolom.

Er zijn nog 2 vlakkvullingen waarbij er wel overlap is tussen de tweede en derde kolom:



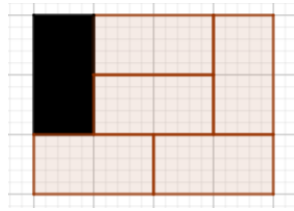
We bekomen in het totaal 11 vlakkvullingen voor een 3×4 -rechthoek, dus $T(2) = 11$.

We tonen nu volgende formule aan:

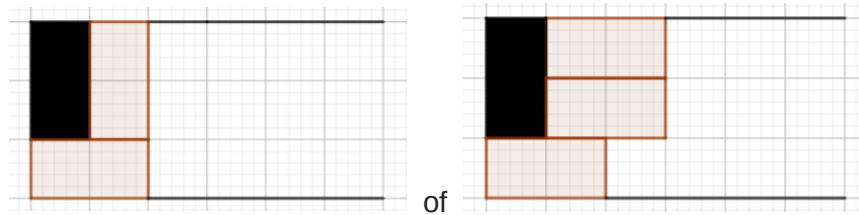
$$T(n) = 4 \cdot T(n-1) - T(n-2) \text{ voor } n > 2$$



Vooraf definiëren we $L(n)$ als het aantal vlakvullingen van een $3 \times 2n$ -rechthoek waarvan de eerste twee vakken van de eerste kolom al gevuld zijn. Hieronder zie je een voorbeeld van zo een betegeling voor een 3×4 -rechthoek.



Voor het vullen van de eerste 2 kolommen van een vlakvulling van een $3 \times 2n$ -rechthoek waarvan de eerste twee vakken van de eerste kolom al gevuld zijn, zijn er twee mogelijkheden om te starten:



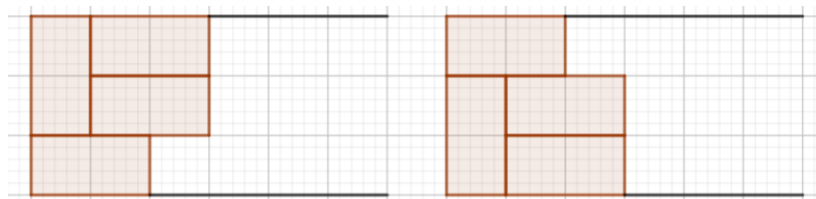
Hierdoor bekomen we volgende gelijkheid:

$$L(n) = T(n-1) + L(n-1) \quad (1)$$

Nu tellen we het aantal vlakvullingen $T(n)$ van een $3 \times 2n$ -rechthoek met 1×2 -tegels met $n > 2$.

Het aantal vlakvullingen van een $3 \times 2n$ -rechthoek zonder overlap tussen de tweede en derde kolom is $3 \cdot T(n-1)$. De eerste 2 kolommen kunnen we immers op 3 manieren vullen en dan blijft er nog een $3 \times 2(n-1)$ -rechthoek over die $T(n-1)$ vlakvullingen heeft.

We ontbreken nu nog het aantal vlakvullingen waarvan een 1×2 -tegels zowel een vlak van de tweede als van de derde kolom bedekt. Deze vlakvullingen kunnen we onderverdelen in 2 categorieën. Op de afbeelding zie je voor beide categorieën hoe de vlakvullingen beginnen.



Het aantal gezochte vlakvullingen $T(n)$ is:

$$T(n) = 3 \cdot T(n-1) + 2 \cdot L(n-1) \text{ voor } n > 2 \quad (2)$$

Uit (1) en (2) volgt:

$$T(n) = T(n-1) + 2 \cdot L(n)$$

Voor $n > 2$ geldt dus ook:

$$T(n-1) = T(n-2) + 2 \cdot L(n-1) \text{ of } L(n-1) = \frac{T(n-1) - T(n-2)}{2} \quad (3)$$

Vullen we (3) in (2) in. We bekomen:

$$T(n) = 4 \cdot T(n-1) - T(n-2) \text{ voor } n > 2$$



2 Het aantal vlakvullingen van een $2 \times n$ -rechthoek met 1×1 - en 1×2 -tegels

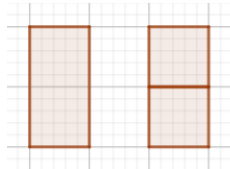
Het aantal vlakvullingen $T(n)$ van een $2 \times n$ -rechthoek met 1×1 - en 1×2 -tegels kan met volgende formule berekend worden:

$$T(n) = 3 \cdot T(n-1) + T(n-2) - T(n-3) \text{ voor } n > 3$$

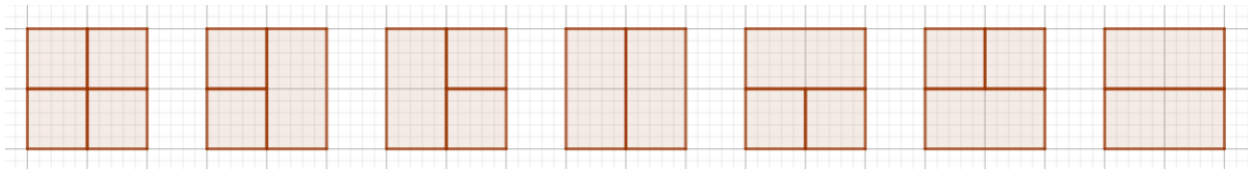
met $T(1) = 2$, $T(2) = 7$ en $T(3) = 22$.

We tonen dit aan.

Voor $n = 1$ zijn er 2 mogelijke vlakvullingen, dus: $T(1) = 2$.



Voor $n = 2$ zijn er 7 mogelijke vlakvullingen, dus $T(2) = 7$.

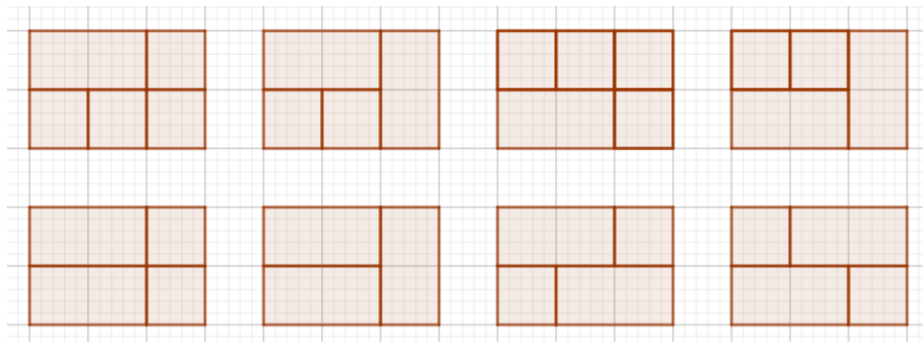


Voor $n = 3$ zijn er 22 mogelijke vlakvullingen, dus $T(3) = 22$. We kunnen dit aantonen door deze vlakvullingen in 2 categorieën op te splitsen.

- De vlakvullingen zonder overlap tussen de eerste en de tweede kolom starten allemaal met twee 1×1 -tegels of één 1×2 -tegels in de eerste kolom. Er zijn dus $2 \cdot T(2) = 14$ zulke vlakvullingen.



- De resterende 8 vlakvullingen zijn allemaal vlakvullingen met overlap tussen de eerste en de tweede kolom.

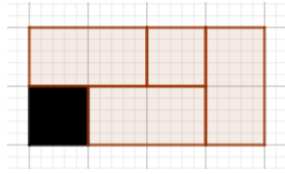


We tonen nu volgende formule aan:

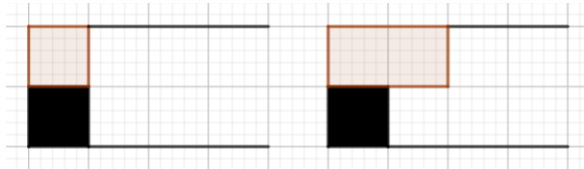
$$T(n) = 3 \cdot T(n-1) + T(n-2) - T(n-3) \text{ voor } n > 3$$



We stellen het aantal vlakvullingen van $2 \times n$ -rechthoek waarbij het eerste vak van de tweede rij al gevuld is gelijk aan $M(n)$. Hieronder zie je een voorbeeld van zo een vlakvulling van een 2×4 -rechthoek.



Elke vlakvulling van $2 \times n$ -rechthoek waarbij het eerste vak van de tweede rij al gevuld is begint in de eerste rij met een 1×1 - of een 1×2 tegel.

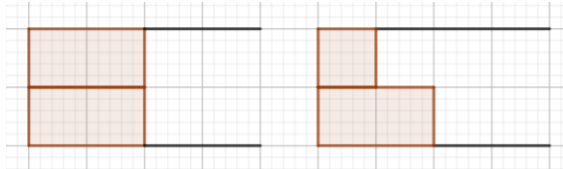


Hierdoor bekomen we volgende gelijkheid:

$$M(n) = T(n-1) + M(n-1) \quad (1)$$

We tellen nu het aantal vlakvullingen $T(n)$ van een $2 \times n$ -rechthoeken met 1×1 - en 1×2 -tegels. Hiervoor kijken we naar het eerste vak van de tweede rij. We onderscheiden drie gevallen:

- Dit vak is een 1×1 -tegel. Er zijn $M(n)$ verschillende vlakvullingen van dit type mogelijk.
- Dit vak behoort tot een 1×2 -tegel die horizontaal ligt. Er zijn $T(n-2) + M(n-1)$ mogelijke vlakvullingen. Elke vlakvulling begint namelijk zoals één van onderstaande twee mogelijkheden.



- Dit vak behoort tot een 1×2 -tegel die verticaal ligt. Er zijn $T(n-1)$ verschillende vlakvullingen van dit type.

We bekomen volgend resultaat:

$$T(n) = T(n-1) + T(n-2) + M(n) + M(n-1) \quad (2)$$

Uit (1) en (2) volgt:

$$T(n) = T(n-2) + 2.M(n) \quad (3)$$

Voor $n > 3$ volgt uit (3):

$$M(n) = \frac{T(n) - T(n-2)}{2} \text{ en } M(n-1) = \frac{T(n-1) - T(n-3)}{2} \quad (4)$$

Vullen we beide uitdrukkingen van (4) in (2) in, dan bekomen we:

$$T(n) = 3.T(n-1) + T(n-2) - T(n-3) \text{ voor } n > 3$$

