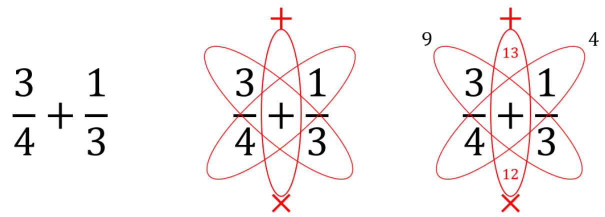
Wat bedoelen ze toch met ... answer getting?

Irene van Stiphout

SLW, augustus 2021

Het halen van hoge cijfers is fijn voor docenten, leerlingen, schoolleiding en ouders. Maar er zit ook een schaduwzijde aan: door die druk is het verleidelijk om eenzijdig te focussen op het leren vinden van antwoorden. De beheersing van wiskunde wordt hier niet altijd mee versterkt.



Figuur 1: *De vlinder als manier om ongelijknamige breuken op te tellen*

Voorbeeld

Op sommige rekensites wordt een vlinder gebruikt om uit te leggen hoe ongelijknamige breuken kunnen worden opgeteld. Zie figuur 1. Om de breuken $\frac{3}{4}$ en $\frac{1}{3}$ op te tellen, worden diagonaal en verticaal door het +-teken heen ovalen getekend. Deze stellen respectievelijk de vleugels en het lijf van de vlinder voor. Vervolgens wordt de antenne op het hoofd van de vlinder gezet in de vorm van het +-teken en het achterlijf wordt aangegeven met het ×-teken.

Daarna kan het rekenen beginnen: de getallen in de vleugelovalen worden met elkaar vermenigvuldigd. Dat geeft de 9 en de 4 die linksboven en rechtsboven staan weergegeven. Deze twee tussenuitkomsten worden opgeteld zoals is weergegeven in het +-teken uit de antenne. De uitkomst wordt net onder de antenne ingevuld. Daarna moeten de noemers onderin worden vermenigvuldigd. Het ×-teken helpt hieraan herinneren. De uitkomst van deze vermenigvuldiging wordt onderin het lijf van de vlinder geschreven. Vervolgens kan de uitkomst worden afgelezen uit het lijfje van de vlinder: $\frac{13}{12}$.

Het tekenen van de vlinder helpt om te onthouden wat er gedaan moet worden. Wat overblijft zijn relatief eenvoudige deelberekeningen. De vraag is echter wat leerlingen van deze aanpak leren. Want hoe moet dat nu bij $\frac{3}{4}+\frac{1}{3}+\frac{2}{5}$? Daro (2011) spreekt in dit verband van *answer getting*: leerlingen leren geen wiskunde, maar alleen het vinden van het antwoord.

Answer getting

Op zoek naar een nieuw curriculum bestudeerde de Amerikaanse wetenschapper Phil Daro honderden uren videomateriaal van wiskundelessen in Japan en in de Verenigde Staten. Japan behoort in internationaal vergelijkende studies als TIMSS [1] tot de top 5 van best presterende landen terwijl de Verenigde Staten een stuk lager scoren. Daro zag een verschil in hoe leraren over het algemeen tegen opgaven aankijken. Leraren in de VS zien een opgave en vragen zich af

> "How can I teach my kids to get the answer to this problem?"

In Japan zien leraren een opgave en vragen zich af

> "What is the mathematics they are supposed to learn, working on this problem?"

Dit verschil in aanpak lijkt misschien niet groot, maar is het wel. Daarnaast zag Daro een verschil in de manier waarop met fouten wordt omgegaan. In

[1] Trends in International Mathematics and Science Study

klassen in de VS wordt een fout antwoord van een leerling in het algemeen gezien als het probleem van die specifieke leerling. Bij die leerling zit het kennelijk nog niet goed in het hoofd, die leerling begrijpt iets misschien (nog) niet. In Japan, zag Daro, wordt een fout van een leerling niet zozeer gekoppeld aan die ene leerling, maar als een mogelijke moeilijkheid in de leerstof. Daro spreekt over de *kanarie in de mijn*, een soort alarm omdat die foute aanpak of redenering kennelijk voor de hand ligt. Dat betekent dat meer leerlingen die fout zouden kunnen maken. Op die manier biedt een onjuiste aanpak van een leerling de mogelijkheid om met de klas te verkennen waarom die aanpak niet werkt. Wat is in die aanpak misgegaan en wat kan daarvan worden geleerd? Daro (2011) deed zijn onderzoek in de VS. De vraag is in hoeverre answer getting speelt in het Nederlandse onderwijs.

Rond 2010 zijn verschillende Nederlandse promotiestudies gedaan naar de prestaties van leerlingen in het basisonderwijs (Kraemer, 2011), het voortgezet onderwijs (Van Stiphout, 2011; Roorda, 2012) en de overgang daartussen (Bruin-Muurling, 2010). Hoewel deze studies los van elkaar zijn uitgevoerd, geven ze het beeld dat leerlingen niet tot het gewenste niveau van beheersing en van begrijpen komen en daar ook last van hebben. Zo bleek onder meer dat leerlingen

- standaardopgaven kunnen maken, maar vastlopen als er net iets anders wordt gevraagd
- dezelfde berekening bij verschillende vakken niet herkennen als dezelfde
- blijven hangen in eenvoudige, maar succesvolle strategieën die beperkend kunnen zijn in het verder generaliseren en abstraheren.

In een verdere analyse van deze studies introduceerden Gravemeijer et al. (2016) het begrip *task propensity* dat zij definiëren als

> "...the tendency to think of instruction in terms of individual tasks that have to be mastered by students."

Zij betogen dat de manier van denken over wiskundeonderwijs als losse te beheersen taken ertoe leidt dat het onderwijs zich (onbewust) gaat richten op het aanleren van procedures om tot het juiste antwoord te komen. Het snel vinden van juiste antwoorden wordt daarbij gezien als doel van het wiskundeonderwijs, in plaats van dat het vinden van oplossingsmethoden een tussenopbrengst is op de weg naar wiskundig begrip. Dit verleidt docenten en methodemakers tot het inzetten op aanpakken die snelle antwoorden genereren in plaats van te focussen op en te investeren in de onderliggende wiskunde.

Hierbij past de nuancering dat het vinden van antwoorden zeker relevant is. Het punt is dat dit niet het enige doel moet zijn.

Wat werkt answer getting in de hand?

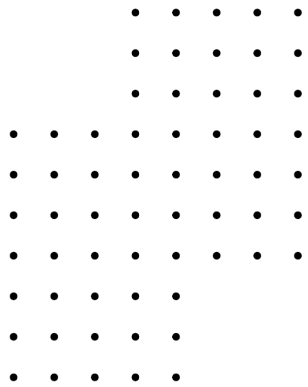
Er zijn meerdere factoren die answer getting in de hand werken. Van Stiphout & Bruin-Muurling (2016) beschrijven er drie.

Als eerste noemen ze het beeld dat docenten en leerlingen hebben van wat wiskunde is. Wiskunde kan worden gezien als een vak waarin het draait om sommen maken en om het leren volgen van stappenplannen om het goede antwoord te vinden. In een bredere visie wordt wiskunde ook gezien als een manier van denken waarin het naast sommen kunnen maken ook gaat om het stellen van de juiste vragen, om modelleren, en om het flexibele gebruik van wiskundige manieren van denken en wiskundige technieken.

Met het oog op de toekomst, lijkt die bredere blik meer perspectief te bieden. Wereldwijd zien we een trend waarin juist de procedurele vaardigheden minder handmatig worden uitgevoerd, terwijl conceptuele vaardigheden steeds belangrijker worden om met de beschikbare technologie om te gaan (Gravemeijer et al., 2017). De introductie van wiskundige denkactiviteiten in de examenprogramma's havo en vwo en het pleidooi voor wiskundige denk- en werkwijzen van curriculum.nu zijn voorbeelden hiervan in Nederland. Hierin worden wiskundige domeinen als verbanden, statistiek en meetkunde gekoppeld aan overstijgende vaardigheden als probleem oplossen, modelleren en logisch redeneren.

Als tweede factor noemen ze de druk die vanuit de maatschappij op leerlingen, docenten en ouders wordt gelegd om te zorgen voor hoge cijfers. De belangen zijn groot: ouders willen een zo hoog mogelijk diploma voor hun kind, het functioneren van docenten wordt gekoppeld aan de cijfers van hun leerlingen en leerlingen willen hoog scoren om toegelaten te worden tot vervolgstudies. Dit versterkt de neiging te focussen op het snel aanleren van technieken om tot goede antwoorden te komen.

Als derde factor noemen ze de behoefte van het onderwijs om leerlingen zo efficiënt mogelijk door



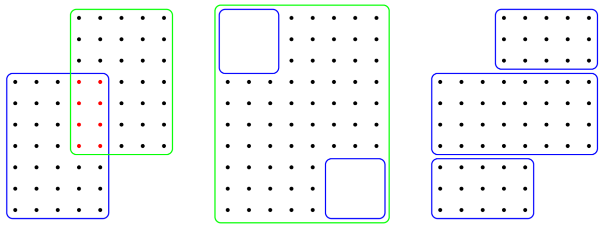
Figuur 2: *Hoe tel je het aantal stippen?*

het onderwijs heen te loodsen. Eventuele hobbels die leerlingen tegenkomen in het leerproces worden gezien als een verstoring van het leerproces die voorkomen moeten worden (Bruin-Muurling & Verschoor, 2015). Het leren moet zo comfortabel en prettig mogelijk verlopen. Een uiting daarvan is bijvoorbeeld het opdelen van een opgave door extra deelvragen toe te voegen.

Het gevolg is dat inmiddels de meeste hobbels in het curriculum zijn gladgestreken, waardoor er eigenlijk nauwelijks meer sprake kan zijn van leren (Skemp, 1979). Leerlingen zijn o*ngeduldige probleemoplossers* geworden die verwachten dat de oplossing binnen een paar minuten te vinden is (Meyer, 2010). Door vraagstukken op te splitsen in kleine deelproblemen (a, b, c etc.) is per deelprobleem weinig denkwerk meer nodig. Bovendien kan dit ervoor zorgen dat de kern van de opgave als geheel uit het zicht verdwijnt (Van Stiphout & Bruin-Muurling, 2016).

WAT TE DOEN IN DE KLAS?

Aandacht voor standaardproblemen, oefenen en goede antwoorden horen ook bij het onderwijs. Hoe zorg je dan dat je wegblijft bij een eenzijdige focus daarop, weg bij de answer getting? Het helpt hierbij om bewust aandacht en tijd te nemen en te beseffen dat aandacht voor conceptuele kennis en functioneel gebruik van wiskunde, meer tijd mag lijken te kosten, maar dat het ook veel oplevert. Daarvoor zijn vele mogelijkheden. Een eenvoudige stap kan zijn om in plaats van een stappenplan aan te bieden, leerlingen dit zelf te laten maken (Van Stiphout & Bruin-Muurling, 2018). Een andere manier is de focus verleggen van het vinden van het antwoord naar welke aanpak je kiest. Een voorbeeld van zo'n opgave staat in figuur 2. De vraag is niet hoeveel stippen er staan, maar hoe je het aantal stippen kunt tellen.



Figuur 3: *Welke manieren zie je nog meer om deze stippen te tellen?*

Ga je de figuur opsplitsen in kleine rechthoekjes? En zo ja, hoe dan?

In figuur 3 staan drie verschillende manieren om te tellen: twee rechthoeken met een overlap die je dubbel telt dus eraf moet trekken, een grote rechthoek maken en daar twee vierkantjes vanaf halen, en opsplitsen in drie rechthoeken. Is de ene manier handiger dan de andere? En waarom dan? Wat hebben deze manieren gemeenschappelijk? En wat is het verschil?

In zijn boek 'Wiskunde is overal' laat Orlin (2019) zien hoe standaardopgaven interessanter gemaakt kunnen worden door hier nieuwe vragen toe te voegen. Hij doet dat met een voorbeeld over de omtrek en oppervlakte van rechthoeken. Een standaardopgave is gegeven een rechthoek van bijvoorbeeld 3 bij 4, bereken de omtrek en de oppervlakte. Het kan spannender door een ander type vraag te stellen, betoogt hij. Als voorbeeld geeft hij de volgende vraag.

> Kun je twee rechthoeken vormen waarvan de eerste een grotere omtrek heeft, en de tweede een grotere oppervlakte?

In deze vraag worden twee verschillende benaderingen van de grootte van de rechthoek (omtrek en oppervlakte) met elkaar vergeleken. Wat is het effect van de een op de ander? Hoe hangen ze samen? Deze vragen doen een beroep op de creativiteit van leerlingen die aan het tekenen zullen gaan. Na enig proberen zullen ze ontdekken dat een *lange, dunne* rechthoek een relatief grote omtrek heeft en dat een meer *vierkante* rechthoek een grotere oppervlakte heeft. Op deze manier kan het begrip van oppervlakte, omtrek en de relatie daartussen worden versterkt.

Tot slot een voorbeeld dat afkomstig is van de website van de Britse wiskundeleraar Craig Barton [2]. Hij

[2] Zie de website variationtheory.com

presenteert leerlingen vergelijkingen en een eerste stap naar een oplossing. De vraag is dan of deze eerste stap juist is. Een voorbeeld hiervan is

$$\begin{aligned} 2x - 6 &= 10 \\ 2x &= 16. \end{aligned}$$

Het zal duidelijk zijn dat dit een juiste eerste stap is. Geldt dat ook voor deze?

$$\begin{aligned} 2x - 6 &= 10 \\ x - 6 &= 5 \end{aligned}$$

En hoe zit het bij deze?

$$\begin{aligned} 6 - 2x &= 10 + x \\ 6 &= 10 + 2x^2 \end{aligned}$$

Door dit type vragen wordt de aandacht expliciet afgeleid van het vinden van het antwoord en gestuurd naar wat er nu eigenlijk gebeurt. Interessant kan zijn om te ontdekken wat er goed gaat in bovenstaande voorbeelden en waar het mis gaat. Bij de middelste valt op dat het delen door 2 goed is gegaan bij $2x$ en bij 10 en bij de 6 is misgegaan. Bij de laatste kan een goede stap zijn om alle x-en naar één kant te halen. Het probleem hier is dat er is vermenigvuldigd en niet opgeteld (en de vermenigvuldiging is dan ook alleen bij de x en niet bij de hele term). In dit soort vragen is er alle ruimte om veelgemaakte fouten van leerlingen in de voorbeelden te stoppen en deze vervolgens te bespreken.

TOT SLOT

Het vinden van antwoorden op vragen is een belangrijk onderdeel van het wiskundeonderwijs, maar niet het enige dat belangrijk is. De vlinder uit het begin van dit artikel mag er mooi uitzien en in bepaalde gevallen een antwoord opleveren, leren begrijpen hoe je breuken kunt optellen doet hij niet. Daarmee verliest hij helaas zijn schoonheid. Uiteindelijk gaat het in het wiskundeonderwijs niet om losse taken die beheerst moeten worden maar om de verbindingen en relaties. Of, in de geest van Daro (2011), het gaat juist om de wiskunde waaraan een bepaalde opgave geacht wordt bij te dragen. Die wiskunde zichtbaar maken voor leerlingen is de kunst.

REFERENTIES

Bruin-Muurling, G. (2010). *The development of proficiency in the fraction domain: Affordances and constraints in the curriculum.* PhD thesis, Technische Universiteit Eindhoven, http://alexandria.tue.nl/extra2/692951.pdf.

Bruin-Muurling, G. & Verschoor, M. (2015). Op de toekomst voorbereid kritisch wiskundig leren denken. *Volgens Bartjens*, 34(5).

Daro, P. (2011). Against answer getting. Retrieved at 21/01/2021 from http://vimeo.com/30924981.

Gravemeijer, K., Bruin-Muurling, G., Kraemer, J.-M., & Van Stiphout, I. (2016). Shortcomings of mathematics education reform in the Netherlands, a paradigm case? *Mathematical Thinking and Learning*, 18(1), 25–44.

Gravemeijer, K., Stephan, M., Julie, C., Lin, F., & Ohtani, M. (2017). What mathematics education may prepare students for the society of the future? *International Journal of Science and Mathematics Education*, 15(1), 105–123.

Kraemer, J.-M. (2011). *Oplossingsmethoden voor aftrekken tot 100.* PhD thesis, Technische Universiteit Eindhoven.

Meyer, D. (2010). Math class needs a makeover. TED: Ideas. Retrieved at 17/01/2021 from www.youtube.com/watch?v=NWUFjb8w9Ps.

Orlin, B. (2019). *Wiskunde is overal.* Tielt: Uitgeverij Lannoo.

Roorda, G. (2012). *Ontwikkeling in verandering: ontwikkeling van wiskundige bekwaamheid van leerlingen met betrekking tot het concept afgeleide.* PhD thesis, Rijksuniversiteit Groningen.

Skemp, R. R. (1979). *Intelligence, Learning, and Action.* New York: Wiley.

Van Stiphout, I. (2011). *The development of algebraic proficiency.* PhD thesis, Technische Universiteit Eindhoven, http://alexandria.tue.nl/extra2/719774.pdf.

Van Stiphout, I. & Bruin-Muurling, G. (2016). De verleidingen van het kortste pad. Retrieved from http://www.rekenenwiskunde21.nl.

Van Stiphout, I. & Bruin-Muurling, G. (2018). Stappenplannen: handig of toch niet? *Euclides*, 93(7), 4–6.