
Onderzoekscompetentie - Onderzoekscyclus in wiskunde
2024-03-01

Voorbeeld - Het volume van een glas

In dit voorbeeld werk je aan het leerplandoel over onderzoekscompetentie vanuit specifieke inhoud in wiskunde. Deze opdracht is gekoppeld aan de leerplandoelen over integralen uit de leerplannen III-WisS-d, III-WisS'-d en III-WisS''-d.

- Het leerplandoel over het interpreteren van een bepaalde integraal als de limiet van een som en als een georiënteerde oppervlakte. (III-WisS-d LPD23, III-WisS'-d LPD24, III-WisS''-d LPD31)
- Het leerplandoel over het verband tussen bepaalde integralen en primitieve functies. (III-WisS-d LPD23, III-WisS'-d LPD24, III-WisS''-d LPD32)
- Het leerplandoel over het berekenen van bepaalde en onbepaalde integralen van functies. (III-WisS-d LPD24, III-WisS'-d LPD25, III-WisS''-d LPD33)

1 Oriëntatie

Een fabrikant wil een machine bouwen waarmee je een glas automatisch tot de juiste hoogte laat vullen, rekening houdend met het gegeven dat nadien ook een bepaald volume ijsblokjes moet worden toegevoegd. De machine moet bruikbaar zijn voor om het even welk glas bij verschillende drankjes. Het glas wordt na invoer in de machine gefotografeerd, alsook wordt met sensoren de diameter van de opening gemeten. De fabrikant laat onderzoeken of je met wiskundige software (bv. GeoGebra) de inhoud van het glas kunt bepalen. Tevens wil hij weten op welke manier je de maximale vulhoogte kunt laten bepalen als er nadien ook een bepaalde hoeveelheid ijsblokjes zal worden toegevoegd.

2 Probleemstelling of onderzoeksvragen

Indien je dit onderzoek volledig wil uitvoeren, word je geconfronteerd met een aantal deelproblemen en zal je verschillende deelvragen moeten stellen. Het is voor de leerlingen niet eenvoudig zelf een onderzoeksvraag te stellen. Je kan hen ondersteunen door één deelvraag zelf te geven en hen verder te laten nadenken over andere deelvragen.

Mogelijke deelvragen:

- Op welke manier kan de foto worden ingevoerd zodat men het gemakkelijkst het volume kan bepalen?
- Wat hebben we verder nodig om het volume van het glas te bepalen?
- Hoe kunnen we de vulhoogte berekenen als we het volume van de drank kennen?
- Hoe kunnen we de stijging van het vloeistofpeil laten berekenen nadat we een vast volume ijsblokjes toevoegen?



3 Onderzoeksmethode, gegevensverzameling en analyse

Dit is een toegepast onderzoek waarbij bestaande wiskundige en wetenschappelijke kennis wordt gebruikt om een praktisch probleem te helpen oplossen. De fabrikant wil voldoende diepgang in het onderzoek. Hij wil met de resultaten van het onderzoek praktisch aan te slag. Bij het onderzoek hoort daarom zeker een experimenteel gedeelte, waarbij berekeningen worden gemaakt op basis van een glas met een willekeurige vorm, een bepaalde drank en een gekozen hoeveelheid ijsblokjes.

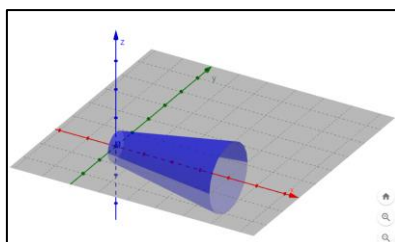
Indien de leerling het internet afspeurt, kan hij of zij op een wat oudere onderzoeksopdracht uitkomen die verwant is met deze (Cahiers T³ Europe, Onderzoekskompetenties in de derde graad, geschreven door Luc Gheysens). In deze nieuwere versie moet het onderzoek verder gaan. Hier wordt expliciet naar het gebruik van ICT gevraagd en wordt er een praktisch probleem aan gekoppeld. Dat was niet de bedoeling bij de oudere versie. De oude versie kan inspiratie laten opdoen maar daar zal het ook bij blijven.

Duiding bij het uitwerken van de onderzoeken

Een eerste onderzoek op basis van een gemakkelijke vorm van het glas

In een eerste geval zou de leerling gewoon water kunnen kiezen als drank. Dan reken je met getallen in plaats van met het symbool voor de dichtheid van een willekeurige drank. De leerling zou in dit geval ook kunnen kiezen voor een bepaald volume ijs, bv. 50 cm³.

Je zou de leerlingen zelf een foto kunnen laten maken met in eerste instantie een gemakkelijke vorm, bv. een afgeknotte kegel. De leerling moet dan verder de reële diameter van de opening meten. Dat moet volstaan om het volume van het glas te bepalen in GeoGebra. De leerling moet achterhalen dat dit glas een omwentelingslichaam is waarvan je de inhoud kunt berekenen met een integraal. De leerling beslist waar hij of zij de foto plaatst ten opzichte van het assenstelsel binnen GeoGebra (zie onderstaande figuur). De leerling bepaalt dan het functievoorschrift van de betrokken rechte om de berekeningen verder te laten uitvoeren.



De leerling bepaalt het volume van het drankje in functie van de vulhoogte (*). Dat kan met een bepaalde integraal van een veeltermfunctie van de tweede graad.

De leerling bepaalt verder het volume van het in het drankje ondergedompelde ijs. Hier doet de leerling beroep op de wet van Archimedes en zoekt hij of zij de massadichtheid van ijs op. Het is immers enkel het ondergedompelde volume ijs dat zorgt voor een stijging van het niveau in het glas. Soms zinken de ijsblokjes ook, dat maakt het wat gemakkelijker. Je kunt de leerlingen laten nadenken bij welke dranken dit het geval is. Voor een aantal leerlingen is de wet van Archimedes voorkennis vanuit de tweede graad.

Het verschil van de maximale inhoud van het glas met het volume van het ondergedompelde ijs wordt berekend. Dit geeft het maximale volume van het drankje dat men kan gebruiken zonder dat



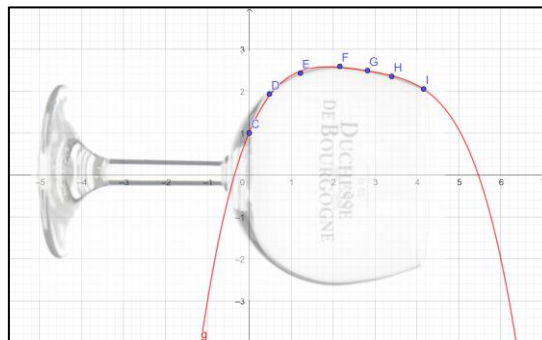
het glas achteraf overloopt. Door deze waarde te combineren met (*), kan de leerling berekenen hoe hoog het glas mag gevuld worden met het drankje vooraleer het ijs te laten toevoegen. Hier moet de leerling een vergelijking van de derde graad oplossen. Dat zal wellicht met ICT moeten gebeuren.

De leerling komt uit op de maximale vulhoogte van het drankje in het glas. Hij of zij zal dit best ook nog experimenteel uittesten zodat de fabrikant beter overtuigd geraakt van de methode.

Een tweede onderzoek op basis van een complexere vorm van het glas

Dit onderzoek verloopt gelijkaardig aan het eerste. De leerling zal hier regressie moeten toepassen om het functievoorschrift te bepalen. De leerling duidt hiertoe een aantal punten aan op de omtrek van het glas (zie onderstaande figuur). Het is niet overdreven van de leerling te verwachten dat hij of zij ook hier zelf een foto maakt en de reële diameter van de opening opmeet.

Het zou slim zijn als een leerling de grootte van de foto aanpast aan de exacte afmetingen van het glas. In het andere geval moet de schaal van de figuur berekend worden en moeten achteraf bepaalde waarden worden aangepast.



In bovenstaande figuur werd de best aansluitende grafiek van een veeltermfunctie van de 4-de graad bepaald. Afhankelijk van de vorm van het glas kan een ander model worden gekozen.

Bij deze tweede opdracht is het zeker onmogelijk berekeningen algebraïsch uit te voeren. De leerling trekt hier volledig de ICT-kaart bij het berekenen van integralen en het oplossen van veeltermvergelijkingen van hogere graden.

4 Conclusie en rapportering

Je kan de leerlingen een onderzoeksrapport laten opstellen waarin zowel de gevonden resultaten als de doorlopen onderzoekscyclus besproken worden. De leerlingen kunnen hun bevindingen aan hun medeleerlingen presenteren. Hier kan het uitvoeren van een experimentje voor de klas voor een aangename afronding van de presentatie zorgen.

