Dienst Curriculum & vorming
Team secundair onderwijs
Guimardstraat 1 - 1040 BRUSSEL
www.katholiekonderwijs.vlaanderen

Logica in de leerplannen wiskunde van de tweede graad D-finaliteit

2023-09-01

1 Inleiding

In de verschillende leerplannen wiskunde van de 2de graad D-finaliteit is een leerplandoel opgenomen over logica, meer bepaald over waarheidstabellen. De concrete nummering van het doel hangt af van het leerplan.

LPD De leerlingen bepalen de waarheidswaarde van logische uitspraken m.b.v. waarheidstabellen.

★ Tautologie, contradictie

Dit document heeft als doel inhoudelijke duiding te geven bij deze leerplandoelstelling, zodat deze doelstelling binnen de beschikbare lestijd kan gerealiseerd worden. Dit document is niet bedoeld als leermateriaal voor leerlingen.

2 Logische operatoren en waarheidstabellen

De uitspraak p = '24 is een drievoud' is een ware uitspraak. De uitspraak q = 'elk reëel getal is te schrijven als een breuk' is vals. Een uitspraak is dus waar of niet waar. Dit stellen we voor met 1 (waar) of 0 (vals).

In logica noemen we uitspraken ook wel **proposities**. We maken gebruik van **logische operatoren** om logische uitspraken op te bouwen. Hieronder vind je een beschrijving van deze operatoren, ook wel **logische connectieven** genoemd.

2.1 De negatie (NIET)

We bekijken opnieuw de ware uitspraak p = '24 is een drievoud'. De uitspraak $\neg p$ (lees: 'niet p') betekent '24 is geen drievoud'. Dit is een valse uitspraak.

We kunnen alle mogelijke waarden voor p en $\neg p$ schematisch voorstellen met een **waarheidstabel**. Het is duidelijk dat p en $\neg p$ nooit dezelfde waarde kunnen hebben.

p	$\neg p$
1	0
0	1

2.2 De conjunctie (EN) en disjunctie (OF) van twee uitspraken

We bekijken de volgende uitspraken:

- p = 'Nele komt met de fiets naar school'
- q = 'Arthur komt met de trein naar school'

De uitspraak 'Nele komt met de fiets naar school en Arthur komt met de trein naar school' schrijven we als $p \wedge q$ (= de conjunctie van p en q, lees: 'p en q'). Deze uitspraak is enkel waar als p en q beide waar zijn.

Waarheidstabel van de EN-operator:

p	q	$p \wedge q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

De uitspraak 'Nele komt met de fiets naar school of Arthur komt met de trein naar school' schrijven we als $p \vee q$ (= de disjunctie van p en q, lees: 'p of q'). We bedoelen hier de inclusieve 'of': deze uitspraak is waar als minstens één van beide uitspraken p en q waar zijn. Ze kunnen dus ook beide waar zijn.

Waarheidstabel van de OF-operator:

p	q	$p \vee q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

In de omgangstaal geven we vaak een andere betekenis aan 'of'. Als je vraagt 'Wil je water of cola?', verwacht je dat er een keuze gemaakt wordt en niet dat iemand beide consumpties kiest. Dit is de exclusieve 'of'. In de afbakening bij dit leerplandoel wordt er aandacht gevraagd voor dit verschil in betekenis.

2.3 De implicatie (ALS … DAN …)

We bekijken de volgende uitspraken:

- p = 'Het regent'
- q = 'Het voetpad is nat'

De uitspraak 'Als het regent, is het voetpad nat' schrijven we als $p \Rightarrow q$ (= de implicatie, lees: 'als p dan q'). Deze uitspraak is enkel vals als p waar is en q vals. Als het niet regent, kunnen we niets besluiten over het voetpad. Dit kan droog of nat zijn. We stellen alle gevallen voor in een tabel.

Waarheidstabel van de implicatie:

p	q	$p \Rightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Vaak wordt ten onrechte beweert dat deze uitspraak overeenkomt met ‘Als het niet regent, is het voetpad niet nat’ ($\neg p \Rightarrow \neg q$). Met een waarheidstabel kunnen we aantonen dat dit niet op hetzelfde neerkomt.

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \Rightarrow \neg q$
1	1	0	0	1
1	0	0	1	1
0	1	1	0	0
0	0	1	1	1

De laatste kolom is verschillend van de laatste kolom van de waarheidstabel van de implicatie. De twee uitspraken zijn dus niet gelijkwaardig.

De oorspronkelijke uitspraak ‘Als het regent, is het voetpad nat’ komt echter wel overeen met ‘Als het voetpad niet nat is, dan regent het niet’ ($\neg q \Rightarrow \neg p$). Onderstaande waarheidstabel toont aan dat dit wel gelijkwaardige uitspraken zijn.

p	q	$\neg q$	$\neg p$	$\neg q \Rightarrow \neg p$
1	1	0	0	1
1	0	1	0	0
0	1	0	1	1
0	0	1	1	1

Nu is de laatste kolom wel identiek aan de laatste kolom van de waarheidstabel van de implicatie.

2.4 De equivalentie (ALS EN SLECHTS ALS)

We bekijken de volgende uitspraken:

- p = ‘Nele komt met de fiets naar school’
- q = ‘Arthur komt met de fiets naar school’

Nele en Arthur spreken af dat ze ofwel beiden met de fiets naar school komen ofwel niemand van hen met de fiets naar school gaat.

We kunnen ‘wiskundig’ zeggen: ‘Nele komt met de fiets naar school als en slechts als Arthur met de fiets naar school gaat’. Met symbolen noteren we: $p \Leftrightarrow q$ (equivalentie, lees: ‘*p* als en slechts als *q*’). Deze uitspraak is waar als *p* en *q* beide waar of beide vals zijn.

Waarheidstabel van de equivalentie:

p	q	$p \Leftrightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

2.5 Volgorde van logische operatoren

Bij logische uitspraken met meerdere logische operatoren, geldt de volgende volgorde:

1) negatie ($\neg$)
2) conjunctie ($\wedge$)
3) disjunctie ($\vee$)
4) implicatie ($\Rightarrow$) en equivalentie ($\Leftrightarrow$)

Zo hebben $\neg p \wedge q$ en $(\neg p) \wedge q$ dezelfde betekenis, maar $\neg p \wedge q$ en $\neg(p \wedge q)$ hebben een verschillende betekenis.

2.6 Tautologie en contradictie

Een samengestelde uitspraak die altijd waar is, noemen we een **tautologie**. Zo is de uitspraak $p \Rightarrow p \vee q$ hiervan een voorbeeld. Via een waarheidstabel kan dit eenvoudig nagegaan worden.

p	q	$p \vee q$	$p \Rightarrow p \vee q$
1	1	1	1
1	0	1	1
0	1	1	1
0	0	0	1

Zo is de uitspraak $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$ een ander voorbeeld van een tautologie. (Zie punt 2.3)

Een **contradictie** is een situatie waarbij 2 uitspraken elkaar uitsluiten. Het is dus een samengestelde bewering die nooit waar is. De uitspraak $(p \wedge q) \wedge (\neg p \vee \neg q)$ is een voorbeeld van een contradictie. $p \wedge q$ en $\neg p \vee \neg q$ kunnen nooit dezelfde waarheidswaarde aannemen. Ze spreken elkaar tegen, waardoor $(p \wedge q) \wedge (\neg p \vee \neg q)$ nooit waar kan zijn. Dit zie je in onderstaande waarheidstabel.

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \wedge q$	$\neg p \vee \neg q$	$(p \wedge q) \wedge (\neg p \vee \neg q)$
1	1	0	0	1	0	0
1	0	0	1	0	1	0
0	1	1	0	0	1	0
0	0	1	1	0	1	0

3 Toepassingen

3.1 Een uitspraak in woorden vertalen naar een uitspraak in symbolen

Mogelijke opgaves:

1. Ik zal eten, drinken en vrolijk zijn.
2. Ik zal eten of drinken en vrolijk zijn.
3. Als het niet regent en ik geen afspraak heb, ga ik studeren.

Uitwerking van opgave 3:

Noem p = ‘Het regent’, q = ‘Ik heb een afspraak’, r = ‘Ik ga studeren’
Antwoord: $(\neg p \wedge \neg q) \Rightarrow r$

3.2 Een uitspraak in symbolen vertalen naar een uitspraak in woorden

Beschouw de uitspraken p = 'Ik hou van wiskunde' en q = 'Ik ben happy'. Breng nu onderstaande uitspraken onder woorden.

1. $\neg p$
2. $\neg p \vee q$
3. $\neg(p \Rightarrow q)$

Uitwerking van opgave 3:

p	q	$p \Rightarrow q$	$\neg(p \Rightarrow q)$
1	1	1	0
1	0	0	1
0	1	1	0
0	0	1	0

Antwoord: 'Ik hou van wiskunde en ik ben niet happy', want $\neg(p \Rightarrow q)$ is enkel waar als p waar is en q vals is.

Met dit voorbeeld zien we dat $\neg(p \Rightarrow q)$ en $p \wedge \neg q$ gelijkwaardige uitspraken zijn. De uitspraak $p \wedge \neg q \Leftrightarrow \neg(p \Rightarrow q)$ is dus een tautologie, deze uitspraak is steeds waar.

3.3 De logische waarde bepalen van een uitspraak

Met een waarheidstabel kunnen we de waarde van een logische uitspraak bepalen.

We geven een voorbeeld.

Gegeven:

- p en r zijn ware uitspraken.
- q is een valse uitspraak

Gevraagd: 'Is $(\neg p \vee q) \wedge r$ een ware of een valse uitspraak?'

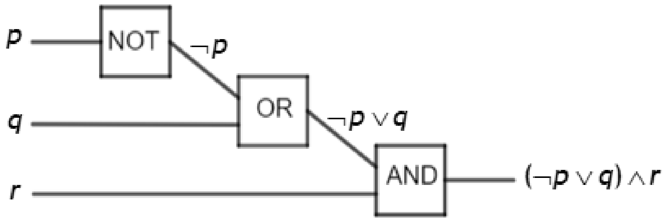
We lossen deze vraag op met een tabel:

p	q	r	$\neg p$	$\neg p \vee q$	$(\neg p \vee q) \wedge r$
1	0	1	0	0	0

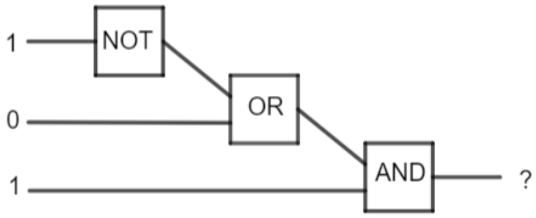
$(\neg p \vee q) \wedge r$ is dus een valse uitspraak.

<u>Opmerking</u>

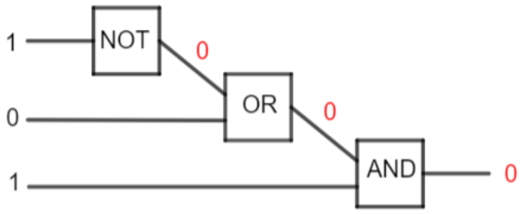
Bij deze toepassing kan de link met logische poorten gelegd worden. Elke operator wordt nu als logische poort voorgesteld.



De opdracht bestaat er dus eigenlijk uit om de waarde van onderstaande schakeling van logische poorten te bepalen.



Oplossing:



Met vragen en bemerkingen over dit document kun je terecht bij jouw vakbegeleider wiskunde.