Dienst Curriculum & vorming
Team secundair onderwijs
Guimardstraat 1 - 1040 BRUSSEL
www.katholiekonderwijs.vlaanderen

Toepassingen op determinanten in de meetkunde
Derde graad D-finaliteit - leerplan Wiskunde B+S’’

2024-09-01

1 Inleiding

In het leerplan Wiskunde B+S’’ van de 3de graad D-finaliteit staat een leerplandoel waarin het begrip determinant van een vierkante matrix aan bod komt.

LPD 36 De leerlingen berekenen de rang van matrices, de inverse matrix van inverteerbare matrices en de determinant van vierkante matrices.

In de wenken bij dit leerplandoel wordt gewezen op de samenhang tussen determinanten, inverteerbaarheid van matrices, de rang van een matrix en oplosbaarheid van stelsels. Uiteraard kunnen ook andere toepassingen aan bod komen. Zo worden determinanten vaak gebruikt bij analytische ruimtemeetkunde om een cartesische vergelijking van een vlak op te stellen. Daarnaast zijn ook toepassingen uit de vlakke meetkunde mogelijk.

Dit document bevat enkele inspirerende toepassingen van determinanten in zowel vlakke als ruimtemeetkunde. Het is bedoeld als ondersteuning voor leerkrachten en niet als leermateriaal voor leerlingen.

2 Analytische meetkunde in het vlak

2.1 Cartesische vergelijking van een rechte

Een cartesische vergelijking van de rechte l door het punt $A(x_1, y_1)$ en met richtingsvector $\vec{v}(a,b)$ kan met behulp van determinanten opgesteld worden.

$$l \leftrightarrow \begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 \\ a & b \end{vmatrix} = 0$$

Voor een rechte door twee gegeven punten $A(x_1, y_1)$ en $B(x_2, y_2)$ krijgen we:

$$l \leftrightarrow \begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \end{vmatrix} = 0$$

Voorbeeld: *‘Stel een cartesische vergelijking van de rechte l door de punten A(1,2) en B(2,5) op.’*

- $\overrightarrow{AB}(1, 3)$ is een richtingsvector van de rechte l.
- $\begin{vmatrix} x - 1 & y - 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 3(x - 1) - (y - 2) = 3x - y - 1$
- $l \leftrightarrow 3x - y - 1 = 0$

Opmerking

We kunnen een vergelijking van de rechte l door de punten $A(x_1, y_1)$ en $B(x_2, y_2)$ ook met een determinant van een 3x3-matrix bepalen.

$$l \leftrightarrow \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

2.2 Drie collineaire punten

Om te onderzoeken of drie punten $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ en $C(x_3, y_3)$ collineair zijn, gaan we bijvoorbeeld na of het punt B op de rechte AC ligt. Uit vorig punt volgt:

$$A(x_1, y_1),\ B(x_2, y_2) \text{ en } C(x_3, y_3) \text{ zijn collineair} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix} = 0$$

Voorbeeld: *'Zijn de punten A(1,2), B(2,5) en C(-1,-1) collineair?'*

- $\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2-1 & 5-2 \\ -1-1 & -1-2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} = -3 + 6 = 3 \neq 0$
- Besluit: de punten zijn niet collineair.

Opmerking:

We kunnen het collineair zijn van drie punten ook nagaan met een determinant van een 3x3-matrix.

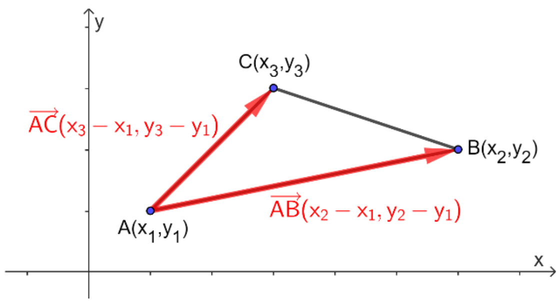
$$A(x_1, y_1),\ B(x_2, y_2) \text{ en } C(x_3, y_3) \text{ zijn collineair} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

2.3 Oppervlakte van een driehoek

De oppervlakte van de driehoek ABC met $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ en $C(x_3, y_3)$ kan met onderstaande formule worden berekend.

$$A_{\Delta ABC} = \pm \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix}$$

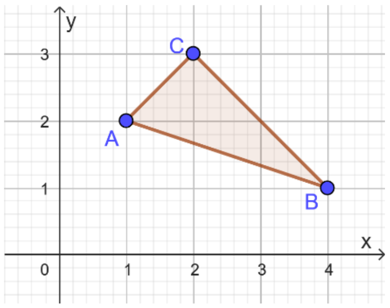
De rijen van de determinant zijn de coördinaten van $\overrightarrow{AB}$ en $\overrightarrow{AC}$.



Aangezien de oppervlakte steeds positief is, hangt het teken af van het teken van de determinant.

In '[Bijlage 1 - Toepassingen op determinanten in de meetkunde]' vind je enkele bewijzen van deze formule.

<u>Voorbeeld</u>: *'Bereken de oppervlakte van de driehoek ABC met A(1,2), B(4,1) en C(2,3).'*



- $\overrightarrow{AB}(3,-1)$ en $\overrightarrow{AC}(1,1)$
- $\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3+1=4$
- $A_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}.4 = 2$

<u>Opmerking</u>

We kunnen deze oppervlakte ook met de formule $A_{\Delta ABC} = \pm\frac{1}{2}.\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$ berekenen.

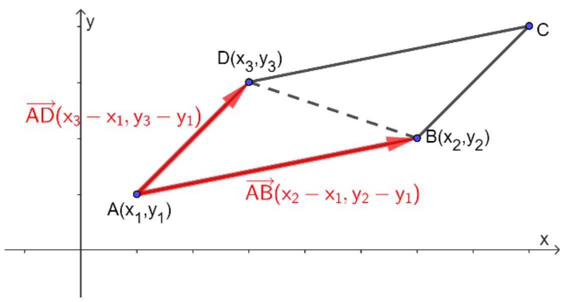
Steunend op de eigenschappen van determinanten en het ontwikkelen van een determinant naar de eerste rij krijgen we immers:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \overset{\substack{R_2-R_1 \\ R_3-R_1}}{=} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & 0 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 \end{vmatrix}$$

2.4 Oppervlakte van een parallellogram

Uit de formule voor de oppervlakte van een driehoek kunnen we de formule voor het berekenen van de oppervlakte van een parallellogram afleiden.

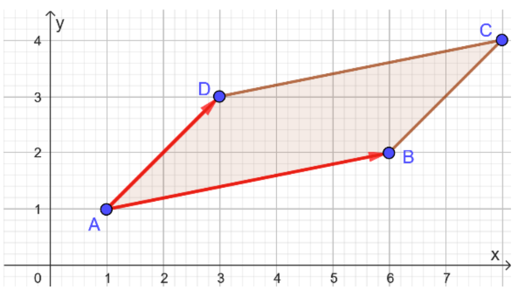
$$A_{\square ABCD} = \pm\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 \end{vmatrix}$$



De rijen van de determinant zijn de coördinaten van $\overrightarrow{AB}$ en $\overrightarrow{AD}$. Het teken hangt af van het teken van de determinant. Een oppervlakte is immers steeds positief.

We kunnen deze oppervlakte ook met de formule $A_{\square ABC} = \pm\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$ berekenen.

<u>Voorbeeld</u>: *'Bereken de oppervlakte van de parallellogram ABCD met A(1,1), B(6,2), C(8,4) en D(3,3).'*



- $\overrightarrow{AB}(5,1)$ en $\overrightarrow{AD}(2,2)$
- $\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 10-2=8$
- $A_{\square ABCD} = 8$

3 Analytische ruimtemeetkunde

3.1 Cartesische vergelijking van een vlak

Naar analogie met een rechte in een vlak kunnen we met determinanten een cartesische vergelijking van een vlak α door het punt $A(x_1,y_1,z_1)$ en met twee lineair onafhankelijke richtingsvectoren $\vec{v}_1(a_1,b_1,c_1)$ en $\vec{v}_2(a_2,b_2,c_2)$ opstellen.

$$\alpha \leftrightarrow \begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = 0$$

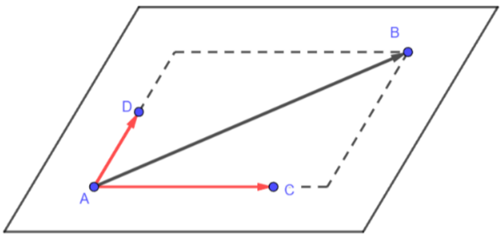
<u>Voorbeeld</u>: *'Stel een cartesische vergelijking van het vlak α door de punten A(1,-2,0), B(0,1,2) en C(1,0,1) op.'*

- $\overrightarrow{AB}(-1,3,2)$ en $\overrightarrow{AC}(0,2,1)$ zijn twee lineair onafhankelijke richtingsvectoren van het vlak α.
- $$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-1 & y-0 & z-1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$
  $$= \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}.(x-1) - \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}.y + \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}.(z-1)$$
  $$= -1.(x-1) - (-1).y + (-2).(z-1)$$
  $$= -x + y - 2z + 3$$
- $\alpha \leftrightarrow -x + y - 2z + 3 = 0$

3.2 Coplanaire punten

Om te onderzoeken of vier punten $A(x_1,y_1,z_1)$, $B(x_2,y_2,z_2)$, $C(x_3,y_3,z_3)$ en $D(x_4,y_4,z_4)$ coplanair zijn, gaan we bijvoorbeeld na of het punt B in het vlak ACD ligt. Uit vorig punt volgt:

$$A(x_1,y_1,z_1), B(x_2,y_2,z_2), C(x_3,y_3,z_3) \text{ en } D(x_4,y_4,z_4) \text{ zijn coplanair} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \\ x_4-x_1 & y_4-y_1 & z_4-z_1 \end{vmatrix} = 0$$



We kunnen dit makkelijk aantonen door gebruik te maken van de determinantvergelijking van een vlak. Hierbij hebben we dan wel verondersteld dat de punten A, C en D een vlak bepalen, zodat $\overrightarrow{AC}$ en $\overrightarrow{AD}$ twee lineair onafhankelijke richtingsvectoren van dat vlak zijn.

Voor het geval dat A, C en D collineair zijn, is het duidelijk dat ook dan bovenstaande eigenschap geldig is: de vier punten zijn immers zeker coplanair en de determinant is steeds gelijk aan nul aangezien de tweede en derde rij in dat geval evenredig zijn.

Voorbeeld: *'Zijn de punten A(-1,0,3), B(2,2,3), C(0,2,1) en D(-1,1,1) coplanair?'*

- $\overrightarrow{AB}(3,2,0)$, $\overrightarrow{AC}(1,2,-2)$ en $\overrightarrow{AD}(0,1,-2)$
- $\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \\ x_4-x_1 & y_4-y_1 & z_4-z_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = (-12+0+0)-(0-6-4) = -12+10 = -2 \neq 0$
- Besluit: de punten zijn niet coplanair.

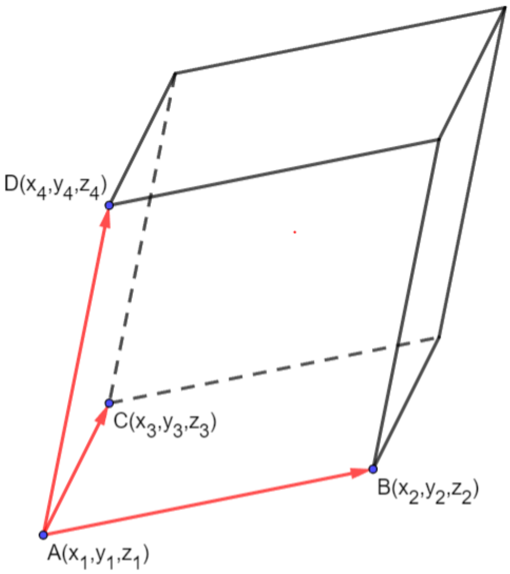
Opmerking:

We kunnen het coplanair zijn van vier punten ook nagaan met een determinant van een 4x4-matrix.

$$A(x_1,y_1,z_1), B(x_2,y_2,z_2), C(x_3,y_3,z_3) \text{ en } D(x_4,y_4,z_4) \text{ zijn coplanair} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

3.3 Volume van een parallellepipedum

Het volume V van het parallellepipedum opgespannen door $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ en $\overrightarrow{AD}$ met $A(x_1,y_1,z_1)$, $B(x_2,y_2,z_2)$, $C(x_3,y_3,z_3)$ en $D(x_4,y_4,z_4)$ kan met onderstaande formule worden berekend.



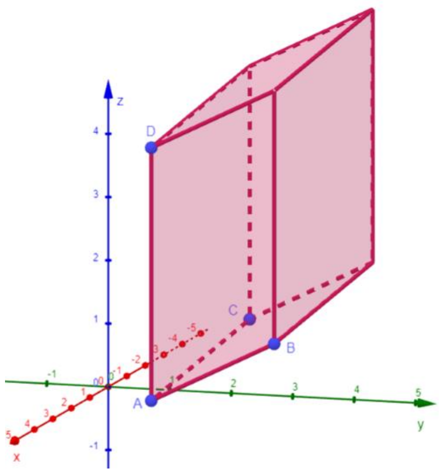
$$V = \pm \begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \\ x_4-x_1 & y_4-y_1 & z_4-z_1 \end{vmatrix}$$

De rijen van de determinant zijn de coördinaten van $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ en $\overrightarrow{AD}$. Het teken hangt af van het teken van de determinant. Een volume is immers steeds positief.

In '[Bijlage 2 - Toepassingen op determinanten in de meetkunde]' vind je het bewijs van deze formule.

Voorbeeld: *'Bereken het volume V van het parallellepipedum opgespannen door $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ en $\overrightarrow{AD}$ met A(1,1,0), B(1,3,1), C(-1,2,1) en D(1,1,4).'*

- $\overrightarrow{AB}(0,2,1)$, $\overrightarrow{AC}(-2,1,1)$ en $\overrightarrow{AD}(0,0,4)$
- $\begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 0+0+4.\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 4.4 = 16$
- $V = 16$



Opmerking:

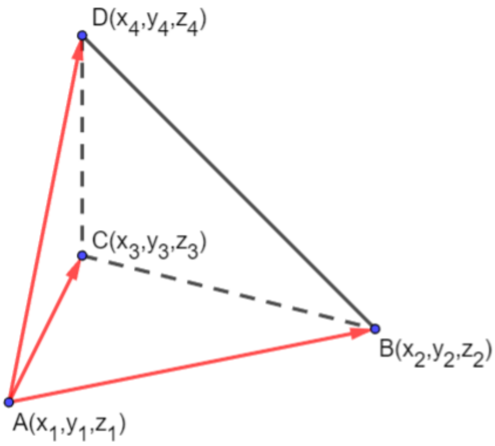
We kunnen dit volume ook met de formule $V = \pm \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix}$ berekenen, want er geldt:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} \overset{\substack{R_2-R_1\\R_3-R_1\\R_4-R_1}}{=} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 & 0 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 & 0 \\ x_4-x_1 & y_4-y_1 & z_4-z_1 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \\ x_4-x_1 & y_4-y_1 & z_4-z_1 \end{vmatrix}$$

3.4 Volume van een viervlak

Het volume V van het viervlak ABCD met $A(x_1,y_1,z_1)$, $B(x_2,y_2,z_2)$, $C(x_3,y_3,z_3)$ en $D(x_4,y_4,z_4)$ kan met onderstaande formule berekend worden.

$$V = \pm\frac{1}{6}\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \\ x_4-x_1 & y_4-y_1 & z_4-z_1 \end{vmatrix}$$



De rijen van de determinant zijn de coördinaten van $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ en $\overrightarrow{AD}$. Het teken hangt af van het teken van de determinant. Een volume is immers steeds positief.

Dit volume kan immers berekend worden met de formule ‘$\frac{1}{3}$ x oppervlakte grondvlak x hoogte’, waarbij het grondvlak de driehoek ABC is. De oppervlakte van deze driehoek is gelijk aan de helft van de oppervlakte van de parallellogram opgespannen door $\overrightarrow{AB}$ en $\overrightarrow{AC}$. Uit de formule voor het volume van een parallellepipedum kunnen we nu de formule voor het volume van een viervlak afleiden.

Voorbeeld: *‘Bereken het volume V van het viervlak ABCD met A(-2,2,1), B(2,-4,0), C(3,4,0) en D(0,0,4).’*

- $\overrightarrow{AB}(4,-6,-1)$, $\overrightarrow{AC}(5,2,-1)$ en $\overrightarrow{AD}(2,-2,3)$
- $\begin{vmatrix} 4 & -6 & -1 \\ 5 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 3 \end{vmatrix} = (24+10+12)-(-4+8-90) = 132$
- $V = \frac{132}{6} = 22$