
Onderzoekscompetentie - Onderzoekscyclus in wiskunde
2024-03-01

Voorbeeld - De zilveren verhouding en de Pellgetallen

In dit voorbeeld werk je aan het leerplandoel over onderzoekscompetentie vanuit specifieke inhouden wiskunde. Deze opdracht is gekoppeld aan leerplandoel 46 van leerplan III-WisS''-d:

- *LPD 46 De leerlingen bepalen limieten van rijen.*

In het voorbeeld komen eveneens bewijsvoering (LPD 4) en matrixrekening (LPD 34) aan bod, wat ook specifieke inhouden voor deze doelgroep zijn.

1 Oriëntatie

De leerlingen hebben meetkundige rijen bestudeerd (LPD44). Het quotiënt van twee opeenvolgende termen van een meetkundige rij is telkens dezelfde constante die we de reden of het quotiënt van de meetkundige rij noemen. We onderzoeken of er nog rijen en bijzondere waarden bestaan waartussen een gelijkaardig verband bestaat. We focussen ons op de rij van de Pellgetallen en de zilveren verhouding.

2 Probleemstelling of onderzoeksvraag

Het is voor leerlingen niet zo eenvoudig om zelf een onderzoeksvraag te stellen. Je kan hen daarbij ondersteunen door zelf een onderzoeksvraag te geven. De leerlingen kunnen op basis van die vraag nadenken over mogelijke deelvragen.

Wat is het verband tussen de zilveren verhouding en de Pellgetallen?

Mogelijke deelvragen:.

- Wat zijn de Pellgetallen en de zilveren verhouding? Beschrijf deze concepten en onderzoek een aantal kenmerken, eigenschappen van deze begrippen.
- Wat is het verband tussen de Pellgetallen en de zilveren verhouding?
- Waar vinden we de zilveren verhouding terug in contexten binnen en buiten de wiskunde?
- Zijn er nog andere rijen en bijzondere getallen waartussen eenzelfde verband bestaat?

3 Onderzoeksmethode, gegevensverzameling en analyse

Dit is een beschrijvend onderzoek met aandacht voor bewijsvoering.

De leerlingen gaan op zoek naar betrouwbare bronnen om informatie te verzamelen over de zilveren verhouding en de Pellgetallen. Ze bestuderen en bewijzen een aantal gevonden eigenschappen en verbanden. De leerlingen proberen zo een antwoord te vinden op de gestelde onderzoeksvragen.



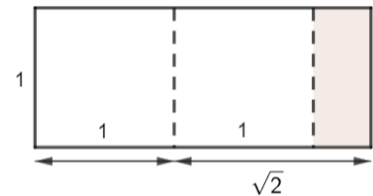
Duiding bij het uitwerken van het onderzoek

De verhouding van twee getallen a en b (met $a > b$) is gelijk aan de zilveren verhouding δ als er aan volgende gelijkheid voldaan is:

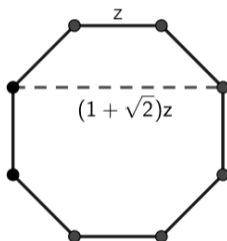
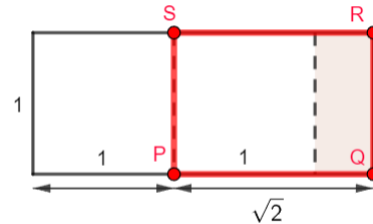
$$\frac{a}{b} = \frac{2a+b}{a} \quad (= \text{de zilveren verhouding } \delta)$$

Uit de definitie van de zilveren verhouding kan afgeleid worden dat δ de positieve oplossing van de vergelijking $x^2 - 2x - 1 = 0$ is. Zo kunnen we aantonen dat de zilveren verhouding gelijk is aan $1 + \sqrt{2}$. De leerlingen kunnen ook onderzoeken hoe de zilveren verhouding als een kettingbreuk kan geschreven worden.

We proberen de zilveren verhouding visueel te maken. Dit kan met een zilveren rechthoek. Dit is een rechthoek waarvan de verhouding tussen de lengte en de breedte de zilveren verhouding is. Als je de twee vierkanten wegnipt, bekom je de gekleurde rechthoek. Je kan aantonen dat deze rechthoek opnieuw een zilveren rechthoek is.



Leerlingen kunnen nu op zoek naar andere objecten of meetkundige figuren waarin deze zilveren rechthoek terug te vinden is. Als je bij een blad papier van bijvoorbeeld A4-formaat een vierkant met als zijde de korte zijde van het volledige blad wegnipt, krijg je een zilveren rechthoek. De verhouding van de lengte tot de breedte van het blad (A4-formaat) is $\sqrt{2}$. Dit blad is dus gelijkvormig met de rechthoek PQRS en de gekleurde rechthoek is een zilveren rechthoek.



Ook in een regelmatige 8-hoek vind je de zilveren verhouding en een zilveren rechthoek terug. Je kan ook aantonen dat de oppervlakte van een regelmatige 8-hoek met zijde z gelijk is aan $2 \cdot \delta \cdot z^2$.

De leerlingen definiëren nu de Pellgetallen. Deze rij kan zowel met een recursief als expliciet voorschrift beschreven worden. (Rij van de Pellgetallen: 0, 1, 2, 5, 12, 29, 70...)

- Recursief voorschrift: $P_0 = 0$ en $P_1 = 1$
 $P_n = 2 \cdot P_{n-1} + P_{n-2}$ voor $n \geq 2$
- Expliciet voorschrift: $P_n = \frac{(1 + \sqrt{2})^n - (1 - \sqrt{2})^n}{2\sqrt{2}}$

Met een bewijs door volledige inductie kan aangetoond worden dat het vermelde expliciete voorschrift deze rij genereert. De Pellgetallen kunnen ook via matrixrekening bepaald worden. De

leerlingen berekenen voor enkele n -waarden $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^n \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ en leiden hieruit het verband met de

Pellgetallen af. Dit verband kan opnieuw met volledige inductie aangetoond worden.



We laten even het eerste Pellgetal ($P_0 = 0$) buiten beschouwing en bepalen de verhoudingen van elke twee opeenvolgende Pellgetallen ($= \frac{P_{n+1}}{P_n}$ met $n \geq 1$). De bekomen rij $\frac{P_2}{P_1}, \frac{P_3}{P_2}, \frac{P_4}{P_3}, \dots$ convergeert naar de zilveren verhouding. Voor grote n -waarden zal $\frac{P_{n+1}}{P_n}$ dus een goede benadering voor de zilveren verhouding zijn. We kunnen met behulp van de Pellgetallen een goede benadering van $\sqrt{2}$ te bepalen. Hoe groter de n -waarde is, hoe beter $\frac{P_{n+1}}{P_n} - 1$ het getal $\sqrt{2}$ zal benaderen. Eventueel kunnen ook de Pellgetallen van de tweede soort en de Pellvergelijking besproken worden.

Naar analogie met de gulden snede vinden we de zilveren verhouding ook in de architectuur terug. Hier wordt echter met de zilveren verhouding meestal $1:\sqrt{2}$ bedoeld.

Er kan ook nagegaan worden of er nog rijen en bijzondere waarden zijn die onderling een gelijkaardig verband hebben als het verband tussen de rij van de Pellgetallen en de zilveren verhouding. De rij van Fibonacci en de gulden snede, maar ook het plastische getal en de rij van Padovan zijn hier voorbeelden van. Het plastische getal wordt in de architectuur gebruikt. Deze laatste voorbeelden zijn eveneens mogelijk onderwerpen voor een onderzoeksopdracht.

4 Conclusie en rapportering

Je kan de leerlingen een onderzoeksrapport laten opstellen waarin zowel de gevonden resultaten als de doorlopen onderzoekscyclus besproken worden. De leerlingen kunnen hun bevindingen aan hun medeleerlingen presenteren.

