
Probleemoplossend denken in de leerplannen wiskunde van so B-stroom en A-finaliteit

2024-04-20

1 Inleiding

In de nieuwe leerplannen wiskunde staat een leerplandoel over het oplossen van problemen. We willen leerlingen leren om problemen binnen verschillende contexten op te lossen gebruikmakend van hun wiskundige kennis en vaardigheden.

LPD 1 De leerlingen lossen vanuit betekenisvolle contexten problemen op door wiskundige concepten en vaardigheden in te zetten.

Dit document heeft als doel inhoudelijke duiding te geven bij deze leerplandoelen. Er worden een aantal didactische principes besproken om te komen tot effectieve wiskundedidactiek. Tot slot worden er voorbeelden van probleem oplossend denken vanuit verschillende inhoudelijk doelen met vermelding van mogelijke oplossingsstrategieën.

2 Enkele begrippen

2.1 Wat noemen wij een probleem?

Er is een verschil tussen oplossen van vraagstukken en problemen oplossen. Bij vraagstukken is de oplossingsmethode vaak aansluitend bij de pas geziene leerstof, terwijl bij problemen oplossen heuristieken (= zoekstrategieën) en een oplossingsmethode zelf gekozen moeten worden.

2.2 Mathematiseren en demathematiseren

Om een probleem op te lossen, wordt het eerst 'vertaald' naar wiskunde (= mathematiseren). We stellen een wiskundig model op waarmee we het antwoord kunnen vinden. Mogelijke modellen zijn diagrammen, meetkundige figuren, schetsen, vergelijkingen, tabellen... We vertalen de opgave naar een 'wiskundig probleem'.

Na het oplossen van het wiskundige probleem interpreteren we het gevonden resultaat in de gebruikte context (demathematiseren). We formuleren een antwoord op de oorspronkelijke vraag. Hierbij zijn we uiteraard kritisch over het gevonden antwoord: 'Is dit realistisch voor de gegeven context?', 'Is het nodig om rekening houdend met de context het resultaat af te ronden en wat is een zinvolle afronding?' ...

2.3 Heuristieken

Bij het oplossen van problemen gaan de leerlingen op zoek naar een oplossingsmethode om het antwoord te vinden. Ze gebruiken hierbij zoekstrategieën of heuristieken die hen ofwel de oplossing geven ofwel een stap dichterbij de oplossing brengen. Hieronder vind je enkele voorbeelden van mogelijke heuristieken.

- het gegeven en gevraagde expliciteren
- het probleem herformuleren
- het probleem opdelen in deelproblemen
- een patroon herkennen
- een tekening, tabel, grafiek, diagram, lijst, schema... maken
- een rekenregel of formule toepassen
- bijzondere gevallen onderzoeken
- van achter naar voor werken
- het probleem vervangen door een eenvoudiger probleem, bv. met kleinere getallen
- alle mogelijkheden opschrijven en elimineren
- tijdelijk een voorwaarde weglaten
- ...

3 Streven naar effectieve wiskundedidactiek

In het wiskundecurriculum speelt het oplossen van problemen een centrale rol. Dit overkoepelend onderwijsdoel is breed inzetbaar over de verschillende inhoudelijke rubrieken van wiskunde heen. Probleemoplossende vaardigheden worden ook vaak ingezet om problemen van buiten de wiskunde aan te pakken. Het gebruik van betekenisvolle contexten in de wiskundeles is hier essentieel. Het zal leerlingen helpen om de transfer te maken tussen hun wiskundige kennis en vaardigheden enerzijds en problemen van buiten de wiskunde anderzijds.

Om bij het aanleren van probleemoplossende vaardigheden de leerwinst bij leerlingen te maximaliseren is het gebruik van effectieve wiskundedidactiek cruciaal.

Keuze van het probleem

- Uitdagende problemen werken motiverend.
- Haalbare problemen zorgen voor een succeservaring bij leerlingen.
- Problemen die aansluiten bij de leefwereld van de leerlingen spreken hen aan.

Belang/activeren van voorkennis

Het hebben van voldoende wiskundige bagage (begrippen, concepten en eigenschappen) is een noodzakelijke voorwaarde voor het oplossen van problemen.

Voorbeeldrol van de leraar

- Oplossingsmethodes: leerkrachten lossen voldoende problemen klassikaal op. Ze verwoorden hierbij hoe ze tot de oplossingsmethode gekomen zijn.
- Heuristieken: leerkrachten zorgen ervoor dat leerlingen bewust ervaren welke heuristieken gebruikt worden door deze te expliciteren.

Actieve verwerking

- Geef leerlingen voldoende tijd om het oplossen van problemen in te oefenen bij de verschillende inhoudelijke rubrieken in het leerplan. Zo krijgen ze de kans om zich verschillende heuristieken en oplossingsmethodes eigen te maken om die nadien te kunnen inzetten in verschillende contexten. Doordat de leerlingen hierbij actief hun wiskundekennis ophalen, geraakt deze kennis beter verankerd. Vergelijk je achteraf enkele verschillende oplossingsmethodes dan verhoogt dit ook hun probleemoplossend denken.

- Leerlingen kiezen bij het oplossen van problemen zelf de oplossingsmethode en verantwoorden hun keuze. Als leraar kan je leerlingen laten kiezen uit een bepaalde selectie van oplossingsmethodes.
- Je kan aandacht schenken aan een selectieve en doelgerichte keuze van de oplossingsmethode bij eenvoudige problemen. De oplossingsmethodes kunnen achteraf vergeleken worden.

Oefening spreiden

Het probleemoplossend denken wordt best geïntegreerd in het normale lesgebeuren en komt best gespreid en gemengd doorheen het schooljaar terug. Het is niet de bedoeling om dit leerplandoel als een apart gegeven te benaderen: de leraar heeft de vrijheid en verantwoordelijkheid om onderstaande doelen breed en strategisch in te zetten en te combineren met de leerplandoelen uit de inhoudelijke rubrieken.

Effectieve feedback

Schenk bij het geven van feedback voldoende aandacht aan het proces. Activerende feedback is feedback die de leerling aan het denken zet.

Bij feedback krijgt de leerling informatie over:

- het resultaat of het product van zijn leren (taakniveau): Welke oplossing heb je gevonden voor het probleem? Is dit de juiste/ een realistische oplossing?
- hoe hij tot het resultaat is gekomen (procesniveau): Hoe pakte je dit probleem aan? Welke oplossingsmethode heb je gebruikt?
- hoe hij het leren zelf kan inschatten en zicht kan krijgen op het eigen leerproces (zelfregulerend niveau): Wat dit een goede oplossingsmethode? Welke andere oplossingsmethoden kan je nog gebruiken? Welke andere zoekstrategieën kan je nog inzetten om een probleem op te lossen?

Differentiatie

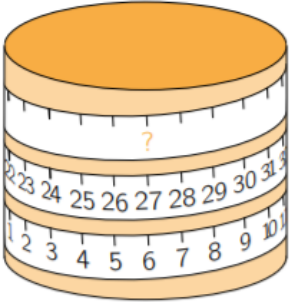
- **Gepaste ondersteuning: van sterk begeleid naar zelfstandigheid.**
 - ⇒ Modelleren is belangrijk bij het probleemoplossend denken. Je geeft een door jou uitgewerkt voorbeeld en benoemt luidop je denkstappen terwijl je de oplossing stapsgewijs laat zien.
 - ⇒ Verlengde instructie: je geeft aan bepaalde groepen van leerlingen meer instructie, aan andere minder.
 - ⇒ Je kan leerlingen laten samenwerken om problemen op te lossen. Het samenwerken geeft leerlingen de kans verschillende oplossingsmethodes te vergelijken en te kiezen voor een bepaalde methode.
 - ⇒ Je kan leerlingen hulpmiddelen laten gebruiken zoals een stappenplan, een lijst met mogelijke heuristieken, een vademecum, een formularium, uitgewerkte voorbeelden...
- **Complexiteit: van eenvoudige problemen naar moeilijkere problemen.**
 - ⇒ Een deel van de leerlingen krijgen enkelvoudige problemen, een deel van de leerlingen meervoudige (= complexere) problemen (met meer onbekenden, combinatie van verschillende inhoudelijke LPD, symbolen/formules in plaats van woorden ...)

4 Voorbeelden van problemen met gebruikte heuristiek

Opgaves van de Wallarowedstrijd B-stroom

Voorbeeld 1 (Wallaroe 2021 vraag 14)

14. Louise plakt een meetlint rond een cilinder. Welk getal hoort op de plaats van het vraagteken?



A 33 B 42 C 48 D 53 E 69

Heuristiek: een patroon herkennen






Als je 1 rij omhooggaat op de cilinder, dan komt er 21 bij. We vertrekken bij 27.
Op de plaats van het vraagteken hoort 48 (= 27 + 21).

Antwoord: C

Voorbeeld 2 (Wallaroe 2011 vraag 4)

4. Welke figuur is geen vierkant, is gekleurd en is rond of driehoekig?



A  B  C  D  E 

Heuristiek: tijdelijk een voorwaarde laten vallen

Welke figuren zijn geen vierkant? B, D en E
Welke figuren (van B, D en E) zijn gekleurd? B en E
Welke figuur (B of E) is rond of driehoekig? B

Antwoord: B

Alternatief: bij elke figuur de drie voorwaarden controleren, zo kunnen we door eliminatie het juiste antwoord vinden.

Voorbeeld 3 (Wallaroe 2019 vraag 24)

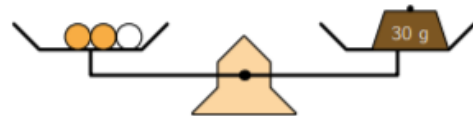
24. Op de weegschalen liggen 3 even zware witte ballen en 6 even zware gekleurde ballen. Hoeveel wegen de 9 ballen samen?

A 90 g B 94 g C 96 g D 99 g E 100 g

Heuristiek: de vraag vervangen door een eenvoudiger vraag

De vraag is ‘Hoeveel wegen de 6 gekleurde en 3 witte ballen samen?’ We vervangen deze vraag door ‘Hoeveel wegen 2 gekleurde en 1 witte bal?’

Hiervoor nemen we uit de rechtse weegschaal aan beide kanten een gekleurde bal weg.



2 gekleurde en 1 witte bal wegen 30 g. De 6 gekleurde en 3 witte ballen wegen dus 90 g.

Antwoord: A

Voorbeeld 4 (Wallaroe 2022 vraag 17)

17. Een stapel van 2 glazen is 16 cm hoog.
Een stapel van 3 glazen is 20 cm hoog.
Hoe hoog is 1 glas?

A 6 cm B 8 cm C 10 cm D 12 cm E 14 cm

Heuristiek: van achter naar voor denken, opsplitsen in deelproblemen, aanduiden van extra gegevens op de figuur

Wat moeten we eerst berekenen om de hoogte van 1 glas te kunnen bepalen?

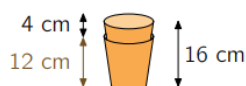
→ De hoogte van de uitstekende rand.

We hebben dus 2 deelvragen.

✓ Hoe hoog is de uitstekende rand? $20 \text{ cm} - 16 \text{ cm} = 4 \text{ cm}$



✓ Hoe hoog is 1 glas? $16 \text{ cm} - 4 \text{ cm} = 12 \text{ cm}$



Antwoord: D

Opdrachten in context voor de A-finaliteit

Voorbeeld 5 (<https://www.alleexamens.nl/examens/VMBO-BB/Wiskunde/> - 2018 tijdvak 1)

Aan 675 mensen zijn vragen gesteld over hun vakantie. Van de 675 mensen gingen er 39% twee weken op vakantie. Hoeveel mensen waren dit?

Heuristiek: regel van drie

	100%	↔	675		100%	↔	675
	↓		↓		: 100 ↓		↓ :100
Voorstelling:	1%	↔	...	Berekening:	1%	↔	$\frac{675}{100}$
	↓		↓		x39 ↓		↓ x39
	39%	↔	...		39%	↔	$\frac{675}{100} \times 39 = 263,25$

Alternatief: voorstellen in een verhoudingstabel

Procent	100%	1%	39%
Aantal mensen	675	$\frac{675}{100}$	$\frac{675}{100} \times 39 = 263,25$

Alternatief: procenten schrijven als een breuk

$$39\% \text{ van } 675 = \frac{39}{100} \text{ van } 675 = 675 \cdot \frac{39}{100} = 263,25$$

Antwoord: 263 mensen gingen er 2 weken op vakantie.

Voorbeeld 6 ('Wiskundig - Probleemoplossend denken voor het beroepsonderwijs', Plantyn 2013)

Lien heeft 60 euro gekregen om in Antwerpen te gaan shoppen. Ze wil een nieuwe jeans kopen. In haar favorieteswinkel zijn er solden. Er is een korting van 25% op alle jeansbroeken. Hoeveel mag de jeansbroek oorspronkelijk kosten om ze te kunnen kopen met de 60 euro?

Heuristiek: visueel voorstellen met een strook

25%	25%	25%	25%
60 euro			korting
20 euro	20 euro	20 euro	20 euro
80 euro			

Alternatief: regel van drie

	60 euro	↔	75% = 100% - 25%
	: 3 ↓		↓ :3
	20 euro	↔	25%
	x4 ↓		↓ x4
	80 euro	↔	100%



Alternatief: voorstellen in een verhoudingstabel

Prijs	60 euro	20 euro	80 euro
Procent	75%	25%	100%

Antwoord: de jeansbroek mag oorspronkelijk 80 euro kosten

Voorbeeld 7

We merken dat onze fles water niet meer helemaal vol is. We verdelen dit water over 4 glazen. In elk glas is er nu exact 18 cl. We nemen nu 2 extra glazen. Hoeveel cl water zal er in elk glas zijn als we het water over deze 6 glazen verdelen?

Heuristiek: herkennen van het soort verband tussen het aantal glazen en het aantal cl water per glas.

Er is een omgekeerd evenredig verband tussen het aantal glazen en het aantal cl water per glas. Zo zal bijvoorbeeld het aantal cl water per glas gehalveerd worden als we het aantal glazen verdubbelt.

$$\begin{array}{rcl} 4 \text{ glazen} & \leftrightarrow & 18 \text{ cl} \\ :4 \downarrow & & \downarrow \times 4 \\ 1 \text{ glas} & \leftrightarrow & 72 \text{ cl} \\ \times 6 \downarrow & & \downarrow :6 \\ 6 \text{ glazen} & \leftrightarrow & 12 \text{ cl} \end{array}$$

Alternatief: opsplitsen in deelproblemen

Hoeveel water was er in de fles? 72 cl ($18 \times 4 = 72$)

Hoeveel is er in elke van de 6 glazen? 12 cl ($72 : 6 = 12$)

Antwoord: in elk glas is er nu 12 cl water

Voorbeeld 8

We hebben een pot met rode verf en een pot met witte verf. We willen deze mengen zodat we een lichtrode verf bekomen. Jens maakt een mengeling van 3 delen rood met 4 delen wit. Marie maakt een mengeling van 4 delen rood met 5 delen wit. Wiens verf heeft de lichtste tint?

Heuristiek: verhouding uitdrukken met een breuk

De mengeling van Jens bestaat uit 7 delen, namelijk 3 delen rood en 4 delen wit. Het rode deel kunnen we uitdrukken met de verhouding $\frac{3}{7}$. De mengeling van Marie bevat 9 delen, namelijk 4

delen rood en 5 delen wit. Het rode deel kan geschreven worden als de verhouding $\frac{4}{9}$.

De lichtste verf komt overeen met kleinste breuk. Breuken kunnen we vergelijken door ze gelijknamig te maken.



- $\frac{3}{7} = \frac{27}{63}$ en $\frac{4}{9} = \frac{28}{63}$
- $\frac{27}{63} < \frac{28}{63}$. De verf van Jens heeft dus de lichtste tint.

Alternatief: indien de klemtoon op het oplossen van problemen ligt en niet zozeer op het rekenwerk kan het rekentoestel ingeschakeld worden.

$\frac{3}{7} \approx 0,429$ en $\frac{4}{9} \approx 0,444$. Nu zien we onmiddellijk dat de verf van Jens de lichtste tint heeft.

Antwoord: de verf van Jens heeft de lichtste tint.

Voorbeeld 9 (Bron: 'Wiskundig - Probleemoplossend denken voor het beroepsonderwijs', Plantyn 2013)

Maak een alcoholvrije cocktail in de klas (of spring eens binnen in de les koken). Er wordt geëxperimenteerd en we merken dat het een goed resultaat geeft als we 3 cl suikersiroop en 7 cl citroensap toevoegen aan 20 cl spuitwater. We hebben een flesje van 0,5 l spuitwater. Hoeveel suikersiroop en citroensap moeten we hieraan toevoegen?

Heuristiek: handig rekenen

Hoeveelheid spuitwater: 0,5 l = 50 cl = 20 cl + 20 cl + 10 cl (= 20/2)

Hoeveelheid suikersiroop: 3 cl + 3 cl + 1,5 cl (= 3/2) = 7,5 cl

Hoeveelheid citroensap: 7 cl + 7 cl + 3,5 cl (= 7/2) = 17,5 cl

Of korter:

Hoeveelheid spuitwater: 0,5 l = 50 cl = 20 cl x 2,5

Hoeveelheid suikersiroop: 3 cl . 2,5 = 7,5 cl

Hoeveelheid citroensap: 7 cl . 2,5 = 17,5 cl

Alternatief: visualiseren met een strook

spuitwater	10 cl	10 cl	10 cl	10 cl	10 cl	= 50 cl
	20 cl					

Hoeveelheid spuitwater: $\frac{20}{2} \cdot 5 = 50$ cl

Hoeveelheid suikersiroop: $\frac{3}{2} \cdot 5 = 7,5$ cl

Hoeveelheid citroensap: $\frac{7}{2} \cdot 5 = 17,5$ cl

Alternatief: regel van drie



sputwater		suikersiroop		citroensap
20 cl	↔	3 cl	↔	7 cl
: 2 ↓		↓ : 2		↓ : 2
10 cl	↔	1,5 cl	↔	3,5 cl
x 5 ↓		↓ x 5		↓ x 5
50 cl	↔	7,5 cl	↔	17,5 cl

Alternatief: voorstellen in een verhoudingstabel

Aantal cl spuitwater	20 cl	10 cl	50 cl
Aantal cl suikersiroop	3 cl	1,5 cl	7,5 cl
Aantal cl citroensap	7 cl	3,5 cl	17,5 cl

Antwoord: we voegen 7,5 cl suikersiroop en 17,5 cl citroensap toe aan het flesje spuitwater.

5 Websites

Op onderstaande websites vind je veel inspirerende voorbeelden.

- www.kangoeroe.org

Bij 'oefenen' kun je alle [vragen van de voorbije jaargangen](#) van de verschillende wiskundewedstrijden terugvinden:

- ✓ Koala (doelgroep: vijfde en zesde leerjaar basisonderwijs)
- ✓ Wallaroo (doelgroep: eerste graad B-stroom)
- ✓ Wallabie (doelgroep: eerste graad A-stroom)

Bij 'oefenen' kun je onder '[klasmateriaal](#)' themablaadjes downloaden voor het werken aan probleemoplossende vaardigheden en het gebruik van heuristiek.

- <https://www.math4all.nl/>

Op deze website vind je les- en oefenmateriaal over de verschillende leerinhouden wiskunde van het so. Hier vind je tal van inspirerende opdrachten die ook ingezet kunnen worden om bij leerlingen de probleemoplossende vaardigheden te versterken.

- <https://www.allexamens.nl/>

Op deze website staan de centrale examens uit Nederland van de voorbije jaren. Via 'Examens vwo', 'Examens havo' en 'Examens vmbo' kun je de examens wiskunde van de verschillende onderwijsniveaus raadplegen.

Inspirerende voorbeelden voor de A-finaliteit vind je bij 'Examens vmbo' onder '[vmbo KB](#)' en '[vmbo BB](#)'.

- ✓ Kaderberoepsgerichte leerweg (KB): leerlingen volgen 12 uur beroepsgericht onderwijs.
- ✓ Basisberoepsgerichte leerweg (BB): leerlingen volgen 12 uur beroepsgericht onderwijs. De vakken algemene vorming zijn van een iets lager niveau dan in de kaderberoepsgerichte leerweg.

