De assen van verdieping in de eerste graad A-stroom

Geert Delaleeuw
in samenwerking met de collega's pedagogisch begeleiders wiskunde van Katholiek Onderwijs Vlaanderen

1. Drie assen van verdieping

Leerlingen zijn niet gelijk, maar wel gelijkwaardig. Daarom is het belangrijk om alle leerlingen in de eerste graad voldoende uit te dagen en tegelijkertijd voldoende te ondersteunen. Differentiatie is inherent verbonden aan goed onderwijs. De leraar ontwerpt zijn lessen op zo'n manier dat ze aansluiten bij de voorkennis van alle leerlingen. Zo spreken we alle leerlingen op hun capaciteiten aan.

Met het oog op de keuze voor een finaliteit in de tweede graad, geeft verdieping de leerling een duidelijker inzicht in zijn abstractievermogen, in zijn vermogen om complexere oefeningen te maken en in de mate waarin hij oefeningen zelfstandig kan aanpakken. Het verhogen van het beheersingsniveau speelt zich bijgevolg af op drie assen: cognitief, inhoudelijk en op het vlak van autonomie.

De cognitieve as: van concreet naar abstract/conceptueel

Wiskundig cognitief verdiepen in de eerste graad A houdt in:

- zich niet beperken tot het bepalen van de grootste gemeenschappelijke deler en het kleinste gemeenschappelijk veelvoud van natuurlijke getallen (met en zonder context), maar ook:
  - deelbaarheidseigenschappen onderzoeken en verklaren, zoals deelbaarheid van een som of product;
  - verschillende algoritmes vergelijken om de grootste gemeenschappelijke deler te bepalen van natuurlijke getallen: via de definitie, via priemontbinding en via het algoritme van Euclides;
- niet alleen meetkundige eigenschappen in het vlak onderzoeken, maar ook omgekeerde beweringen bij meetkundige eigenschappen onderzoeken;
- niet alleen het beeld van een vlakke figuur dat het resultaat is van een transformatie verklaren, maar ook het verband tussen transformaties en coördinaten in een assenstelsel onderzoeken;
- zich niet beperken tot het gebruiken van congruentiekenmerken van driehoeken om de congruentie van twee driehoeken te bewijzen, maar ook meetkundige constructies met passer en liniaal verklaren;
- zich niet beperken tot het onderscheiden van ruimtefiguren vanuit aanzichten, perspectieven en 3D-figuren, maar ook 2D-voorstellingen tekenen van 3D-objecten;
- niet alleen letters gebruiken als onbekenden, als variabelen en voor veralgemeningen, maar ook rekenregels formaliseren, voorwaarden formuleren waaraan letters in rekenregels voldoen (al dan niet met kwantoren) en rekenregels beargumenteren;

- zich niet beperken tot het oplossen van vergelijkingen van de eerste graad met één onbekende, maar ook in formules met verschillende variabelen de ene variabele in functie van de andere noteren;
- bij statistisch onderzoek ook eens verschillende numerieke datasets met elkaar vergelijken via bijvoorbeeld parallelle dotplots, dubbele stengelbladdiagrammen, staafdiagrammen …

De inhoudelijke as: van eenvoudig naar complex

Vragen en opdrachten kunnen eenvoudig zijn, maar ook een extra uitdaging inhouden. Hierbinnen is er een grote variatie mogelijk.

Een vraag kan complexer worden door bijvoorbeeld:
- grotere eisen te stellen aan de rekenvaardigheid (grotere getallen, meer breuken, meer haakjes …);
- de context te vermoeilijken (complexere situatie, meer en/of overbodige gegevens, informatie die pas via een bijkomende redenering kan gevonden worden …);
- …

De as van autonomie: van sterk begeleid naar zelfstandig

Tot de as van autonomie behoren zowel fysieke als niet-fysieke ondersteuning.

Tot de fysieke ondersteuning behoren onder andere:
- al dan niet een formularium gebruiken;
- al dan niet met een stappenplan werken;
- al dan niet een rekenmachine gebruiken.

Tot de niet-fysieke ondersteuning behoren onder andere:
- ondersteuning door de leerkracht krijgen of zelfstandig werken;
- in groep of alleen werken;
- al dan niet meer tijd krijgen;
- soms zelfstandig een eigen oplossingsmethode vinden of enkel de uitgelegde oplossingsmethode gebruiken.

Tijdens evaluaties kan de as van de autonomie bijvoorbeeld tot uiting komen in:
- het aanreiken van vraagstukken waarbij al dan niet een passende tekening gegeven is;
- het stellen van vragen met enkele tussenvragen (gesloten of halfopen vragen) of zonder tussenvragen (open vragen);
- het al dan niet gebruik maken van een rekenmachine, stappenplan, formularium.

2. Voorbeelden

Aan de hand van enkele leerstofonderdelen wiskunde uit de eerste graad A geef ik nu een aantal illustraties die horen bij de verschillende assen van verdieping.

Voorbeeld 1: grootste gemeenschappelijke deler en kleinste gemeenschappelijk veelvoud

De leerlingen moeten in staat zijn om de grootste gemeenschappelijke deler en het kleinste gemeenschappelijke veelvoud van natuurlijke getallen te bepalen.

Vragen zoals de volgende drie zijn vragen over de basisleerstof:

1) Bepaal de grootste gemeenschappelijke deler van 48 en 84.

2) Elien is 24 jaar en Thomas is 18 jaar. De leeftijd van hun grootvader is een veelvoud van elk van hun leeftijden. Hoe oud is hun grootvader?

3) Werk uit zonder rekentoestel: $-\frac{30}{36} - \left(-\frac{18}{48}\right) + \left(-\frac{15}{20}\right)$.

Als we leerlingen vragen om deelbaarheidseigenschappen (zoals deelbaarheid van een som of product) te onderzoeken en verklaren, **dan verhogen we de abstractiegraad** en tillen we het beheersingsniveau duidelijk op langs de **cognitieve as**.

Verdiepende vragen in dit verband zijn dan bijvoorbeeld:

1) Controleer of 11 022 deelbaar is door 11, door 11 022 op een gepaste manier te splitsen in een som of verschil.

2) Als een getal deelbaar is door 4 en door 6, is het dan ook deelbaar door 24? Verklaar!

3) Wanneer we een aantal knikkers verdelen in groepjes van 4, daarna in groepjes van 5 en ten slotte in groepjes van 7, houden we telkens 3 knikkers over.
   Over hoeveel knikkers kan het gaan?

We kunnen hier uiteraard ook verdiepen langs de **as van de inhoud**, anders gezegd: we kunnen **de vraagstelling complexer maken**.

Tijdens de vele schoolbezoeken in de loop van het schooljaar 2019-2020 heb ik de vakgroepen wiskunde geconfronteerd met onderstaande vragen. Ik stelde hierbij een heel grote consensus vast over de scholen heen: zo goed als alle vakgroepen beschouwen onderstaande vragen als verdieping langs de inhoudelijke as.

1) Gegeven de getallen 280, 1540 en 455.
   a) Bepaal hun grootste gemeenschappelijke deler.
   b) Bepaal hun kleinste gemeenschappelijke veelvoud.

2) Welke zijn de kleinste getallen, verschillend van nul, waarmee je 12 en 18 moet vermenigvuldigen om een gemeenschappelijk veelvoud van 12 en 18 te verkrijgen?

3) Als a een deler van b is,
   a) wat is dan de grootste gemeenschappelijke deler van a en b?
   b) wat is dan het kleinste gemeenschappelijke veelvoud van a en b?

4) Zoek twee getallen waarvan de som 108 is en die 12 als grootste gemeenschappelijke deler hebben.

5) Onderzoek het product van het kleinste gemeenschappelijke veelvoud van twee getallen met de grootste gemeenschappelijke deler van die getallen.

6) Wat is het kleinste getal dat bij deling door 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 en 9 als rest 1 heeft?

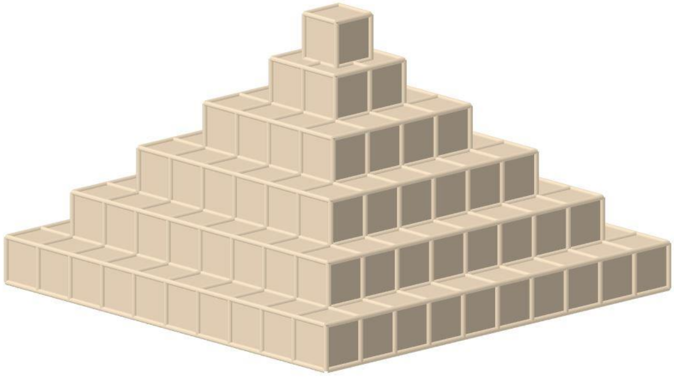
7) Zoek twee natuurlijke getallen waarvan de grootste gemeenschappelijke deler 6 is en het kleinste gemeenschappelijke veelvoud 90.

Voorbeeld 2: het volume van een kubus

Over dit onderwerp bestaat er uiteraard een grote variatie in vragen langs de inhoudelijke as, zowel met als zonder context.

We kunnen echter ook onze vraagstelling gesloten, halfopen of open houden door te variëren in het aantal tussenvragen. Door **geen of een beperkt aantal tussenvragen** te stellen, verdiepen we op de **as van de autonomie**.

Het totale volume van deze stapel kubussen is 47,736 cm³.



Mogelijkheid 1:
1) Hoeveel kubussen telt elke laag uit deze stapel?
2) Hoeveel kubussen bevat deze stapel?
3) Bereken het volume van één kubus.
4) Bereken de zijde van één kubus.
5) Hoe hoog is de stapel?

Mogelijkheid 2:
1) Hoeveel kubussen bevat deze stapel?
2) Bereken het volume van één kubus.
3) Bereken de zijde van één kubus.
4) Hoe hoog is de stapel?

Mogelijkheid 3:
1) Bereken het volume van één kubus.
2) Bereken de zijde van één kubus.
3) Hoe hoog is de stapel?

Mogelijkheid 4:
1) Bereken het volume van één kubus.
2) Hoe hoog is de stapel?

Mogelijkheid 5:
Hoe hoog is deze stapel?

Voorbeeld 3: oplossen van vergelijkingen van de eerste graad met één onbekende

Ook hier weer kunnen we langs de **as van de inhoud** verdiepen door onze vraagstelling **complexer** te maken.

Welk minimumniveau wenst de vakgroep van jouw school bij de leerlingen te bereiken op het einde van de eerste graad? Welke van onderstaande vragen behoren volgens de vakgroep tot basis en welke tot verdieping?

1) $x + 9 = 6$

2) $-3x - 7 = 8$

3) $5 - 2x = 4x - 7$

4) $12 - (2x - 5) = -8$

5) $2(x - 4) - 3(5x - 1) = 10 - 3$

6) $\frac{1}{3}(2x - 3) = \frac{1}{2}(-1 + 2x)$

7) $12 - (5y - 1) = 3y - \big((2y - 1) - (4 - 5y)\big)$

8) $2x - \frac{4}{3} + \frac{2x-1}{6} = -\frac{x+3}{2}$

9) Bepaal k als je weet dat $5x - 2 = -72 + 12x$ en $5x - 2 = 4x + 4k$

De vraagstelling wordt **abstracter** van zodra we de leerlingen vragen om formules om te vormen. Dan verdiepen we langs de **cognitieve as**. Enkele voorbeelden:

1) Schrijf de hoogte van een cilinder in functie van zijn volume en straal.

2) Schrijf de straal van een cilinder in functie van zijn volume en hoogte.

3) Noteer de oppervlakteformule van een trapezium.
   a) Vorm deze formule om naar de hoogte.
   b) Vorm deze formule om naar de kleine basis.
   c) Vorm deze formule om naar de grote basis.

4) Het verband tussen graden Celsius en graden Fahrenheit wordt gegeven door de formule: $T_F = \frac{9}{5}T_C + 32$.
   a) Vorm de formule om zodat je de temperatuur in graden Celsius kunt berekenen als je de temperatuur in graden Fahrenheit kent.
   b) Welke temperatuur wordt bij Celsius en Fahrenheit door hetzelfde getal uitgedrukt?

3. Slotwoord

De aangereikte voorbeelden illustreren dat verdieping zich kan afspelen op drie niveaus: een hoger abstractieniveau, een hogere mate van complexiteit, een grotere autonomie. Die drie assen van verdieping zijn dikwijls niet los te koppelen van elkaar en zullen in de praktijk wellicht in combinatie met elkaar gebruikt worden.

Het is aangewezen om in meer of mindere mate, afhankelijk van de leerlingen of de klas, voor bepaalde vormen van verdieping te kiezen. Het aanbieden van verdieping kan gepaard gaan met een interne differentiatie binnen de klas.

De nadruk moet echter blijven liggen op het feit dat alle leerlingen voldoende kansen moeten krijgen om de basisdoelstellingen te bereiken. Het spreekt dus voor zich dat de meeste lestijd aan de basisleerstof besteed wordt.

Referenties

Leerplan wiskunde eerste graad A-stroom van het Katholiek Onderwijs Vlaanderen.

Geert Delaleeuw is pedagogisch begeleider wiskunde. Hij schreef dit artikel in samenwerking met zijn collega's pedagogisch begeleiders wiskunde van Katholiek Onderwijs Vlaanderen: Alain Beeckman, Michel Bogaerts, Nico Brebels, Filip Cools, Luc De Wilde, Guy Reyntjens, Ria Van Huffel en Machteld Verhenne. E-mail: geert.delaleeuw@katholiekonderwijs.vlaanderen.