Pedagogische begeleiding
Team Curriculum SO

www.katholiekonderwijs.vlaanderen

Probleemoplossend denken in de leerplannen wiskunde van so A-stroom, tweede en derde graad D- en DA-finaliteit

2024-05-17

1 Inleiding

In de nieuwe leerplannen wiskunde van het so staat een leerplandoelstelling over het oplossen van problemen. We willen leerlingen leren om problemen binnen verschillende contexten op te lossen gebruikmakend van hun wiskundige kennis en vaardigheden.

Leerplandoel voor de eerste graad A-stroom en tweede en derde graad D- en D/A-finaliteit:

LPD 1 De leerlingen lossen vraagstukken en problemen op door te mathematiseren en demathematiseren en door gebruik te maken van heuristieken.

De afbakening bij deze leerplandoelstelling is per graad verschillend. Deze afbakening kun je in de verschillende leerplannen zelf terugvinden.

Dit document heeft als doel inhoudelijke duiding te geven bij deze leerplandoelstelling. Er worden een aantal didactische principes besproken om te komen tot effectieve wiskundedidactiek. Tot slot worden er voorbeelden van probleem oplossend denken vanuit verschillende inhoudelijk doelen met vermelding van mogelijke oplossingsstrategieën.

2 Enkele begrippen

2.1 Wat noemen wij een probleem?

In de leerplannen wordt in de pedagogische wenken een onderscheid gemaakt tussen een vraagstuk en een probleem. Bij vraagstukken is de oplossingsmethode vaak aansluitend bij de pas geziene leerstof, terwijl bij problemen oplossen heuristieken en een oplossingsmethode gekozen moeten worden. We geven een voorbeeld.

Als leerlingen in de les de stelling van Pythagoras gezien hebben en aansluitend hierop toepassingen op deze stelling oplossen, noemen we deze toepassingen eerder vraagstukken. De leerlingen weten immers dat ze de stelling van Pythagoras aan het inoefenen zijn en dus in de opgave op zoek moeten gaan naar een rechthoekige driehoek. Door gebruik te maken van de stelling van Pythagoras slagen ze er dan in om het vraagstuk op te lossen.

Geven we echter deze toepassing los van de lessen over de stelling van Pythagoras, dan moet de leerling eerst nog op zoek gaan naar een geschikte methode om het antwoord te vinden. De leerling weet dus niet op voorhand dat de stelling van Pythagoras gebruikt moet worden om de toepassing op te lossen. Het zoeken van de oplossingsmethodes door gebruik te maken van heuristieken is wat wij probleemoplossend denken noemen. De aangeboden problemen mogen uiteraard wel over de geziene leerinhouden gaan.

2.2 Mathematiseren en demathematiseren

Om een probleem op te lossen, wordt het eerst ‘vertaald’ naar wiskunde (= mathematiseren). We stellen een wiskundig model op waarmee we het antwoord kunnen vinden. Mogelijke modellen zijn diagrammen, meetkundige figuren, schetsen, vergelijkingen, tabellen… We vertalen de opgave naar een ‘wiskundig probleem’.

Na het oplossen van het wiskundige probleem interpreteren we het gevonden resultaat in de gebruikte context (demathematiseren). We formuleren een antwoord op de oorspronkelijke vraag. Hierbij zijn we uiteraard kritisch over het gevonden antwoord: ‘Is dit realistisch voor de gegeven context?’, ‘Is het nodig om rekening houdend met de context het resultaat af te ronden en wat is een zinvolle afronding?’ …

2.3 Heuristieken

Bij het oplossen van problemen gaan de leerlingen op zoek naar een oplossingsmethode om het antwoord te vinden. Ze gebruiken hierbij zoekstrategieën of heuristieken die hen ofwel de oplossing geven ofwel een stap dichter bij de oplossing brengen. Hieronder vind je enkele voorbeelden van mogelijke heuristieken.

- het gegeven en gevraagde expliciteren
- het probleem herformuleren
- het probleem opdelen in deelproblemen
- een patroon herkennen
- een tekening, tabel, grafiek, diagram, lijst, schema… maken
- een vergelijking opstellen
- een rekenregel of formule toepassen
- bijzondere gevallen onderzoeken
- van achter naar voor werken
- het probleem vervangen door een eenvoudiger probleem, bv. met kleinere getallen
- alle mogelijkheden opschrijven en elimineren
- tijdelijk een voorwaarde weglaten
- …

3 Streven naar effectieve wiskundedidactiek

In het wiskundecurriculum speelt het oplossen van problemen een centrale rol. Dit overkoepelend onderwijsdoel is breed inzetbaar over de verschillende inhoudelijke rubrieken van wiskunde heen. Probleemoplossende vaardigheden worden ook vaak ingezet om problemen van buiten de wiskunde aan te pakken. Het gebruik van betekenisvolle contexten in de wiskundeles is hier essentieel. Het zal leerlingen helpen om de transfer te maken tussen hun wiskundige kennis en vaardigheden enerzijds en problemen van buiten de wiskunde anderzijds.

Om bij het aanleren van probleemoplossende vaardigheden de leerwinst bij leerlingen te maximaliseren is het gebruik van effectieve wiskundedidactiek cruciaal.

Keuze van het probleem

- Uitdagende problemen werken motiverend.
- Haalbare problemen zorgen voor een succeservaring bij leerlingen.
- Problemen die aansluiten bij de leefwereld van de leerlingen spreken hen aan.

Belang/activeren van voorkennis

Het hebben van voldoende wiskundige bagage (begrippen, concepten en eigenschappen) is een noodzakelijke voorwaarde voor het oplossen van problemen.

Voorbeeldrol van de leraar

- Oplossingsmethodes: leerkrachten lossen voldoende problemen klassikaal op. Ze verwoorden hierbij hoe ze tot de oplossingsmethode gekomen zijn.
- Heuristieken: leerkrachten zorgen ervoor dat leerlingen bewust ervaren welke heuristieken gebruikt worden door deze te expliciteren.

Actieve verwerking

- Geef leerlingen voldoende tijd om het oplossen van problemen in te oefenen bij de verschillende inhoudelijke rubrieken in het leerplan. Zo krijgen ze de kans om zich verschillende heuristieken en oplossingsmethodes eigen te maken om die nadien te kunnen inzetten in verschillende contexten. Doordat de leerlingen hierbij actief hun wiskundekennis ophalen, geraakt deze kennis beter verankerd. Vergelijk je achteraf enkele verschillende oplossingsmethodes dan verhoogt dit ook hun probleemoplossend denken.
- Leerlingen kiezen bij het oplossen van problemen zelf de oplossingsmethode en verantwoorden hun keuze. Als leraar kan je leerlingen laten kiezen uit een bepaalde selectie van oplossingsmethodes.
- Je kan aandacht schenken aan een selectieve en doelgerichte keuze van de oplossingsmethode bij eenvoudige problemen. De oplossingsmethodes kunnen achteraf vergeleken worden.

Oefening spreiden

Het probleemoplossend denken wordt best geïntegreerd in het normale lesgebeuren en komt best gespreid en gemengd doorheen het schooljaar terug. Het is niet de bedoeling om dit leerplandoel als een apart gegeven te benaderen: de leraar heeft de vrijheid en verantwoordelijkheid om onderstaande doelen breed en strategisch in te zetten en te combineren met de leerplandoelen uit de inhoudelijke rubrieken.

Effectieve feedback

Schenk bij het geven van feedback voldoende aandacht aan het proces. Activerende feedback is feedback die de leerling aan het denken zet.

Bij feedback krijgt de leerling informatie over:

- het resultaat of het product van zijn leren (taakniveau): Welke oplossing heb je gevonden voor het probleem? Is dit de juiste/ een realistische oplossing?
- hoe hij tot het resultaat is gekomen (procesniveau): Hoe pakte je dit probleem aan? Welke oplossingsmethode heb je gebruikt?
- hoe hij het leren zelf kan inschatten en zicht kan krijgen op het eigen leerproces (zelfregulerend niveau): Wat dit een goede oplossingsmethode? Welke andere

oplossingsmethoden kan je nog gebruiken? Welke andere zoekstrategieën kan je nog inzetten om een probleem op te lossen?

Differentiatie

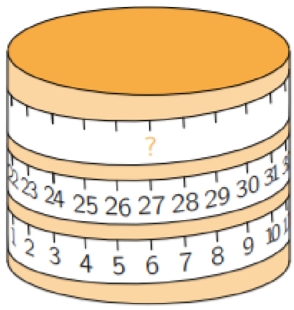
- **Gepaste ondersteuning: van sterk begeleid naar zelfstandigheid.**
  - ⇨ Modelleren is belangrijk bij het probleemoplossend denken. Je geeft een door jou uitgewerkt voorbeeld en benoemt luidop je denkstappen terwijl je de oplossing stapsgewijs laat zien.
  - ⇨ Verlengde instructie: je geeft aan bepaalde groepen van leerlingen meer instructie, aan andere minder.
  - ⇨ Je kan leerlingen laten samenwerken om problemen op te lossen. Het samenwerken geeft leerlingen de kans verschillende oplossingsmethodes te vergelijken en te kiezen voor een bepaalde methode.
  - ⇨ Je kan leerlingen hulpmiddelen laten gebruiken zoals een stappenplan, een lijst met mogelijke heuristieken, een vademecum, een formularium, uitgewerkte voorbeelden…
- **Complexiteit: van eenvoudige problemen naar moeilijkere problemen**.
  - ⇨ Een deel van de leerlingen krijgen enkelvoudige problemen, een deel van de leerlingen meervoudige (= complexere) problemen (met meer onbekenden, combinatie van verschillende inhoudelijke LPD, symbolen/formules in plaats van woorden …

4 Voorbeelden van problemen met gebruikte heuristiek

Om te werken aan probleemoplossend denken kun je naast de gebruikelijke leermethodes ook op onderstaande websites heel wat inspirerend materiaal terugvinden.

<u>**Voorbeeld 1**</u> (Bron: Wallaroe 2021 vraag 14)

14. Louise plakt een meetlint rond een cilinder. Welk getal hoort op de plaats van het vraagteken?



A 33 B 42 C 48 D 53 E 69

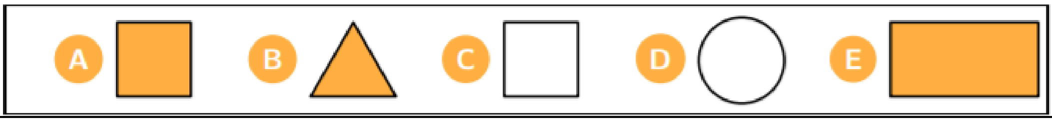
Heuristiek: een patroon herkennen

Als je 1 rij omhoog gaat op de cilinder, dan komt er 21 bij. We vertrekken bij 27.
Op de plaats van het vraagteken hoort 48 (= 27 + 21).

Antwoord: C

<u>Voorbeeld 2</u> (Bron: Wallaroe 2011 vraag 4)

4. Welke figuur is geen vierkant, is gekleurd en is rond of driehoekig?



Heuristiek: tijdelijk een voorwaarde laten vallen

Welke figuren zijn geen vierkant? B, D en E
Welke figuren (van B, D en E) zijn gekleurd? B en E
Welke figuur (B of E) is rond of driehoekig? B

Antwoord: B

Alternatief: bij elke figuur de drie voorwaarden controleren, zo kunnen we door eliminatie het juiste antwoord vinden.

<u>Voorbeeld 3</u> (Bron: Wallaroe 2019 vraag 24)

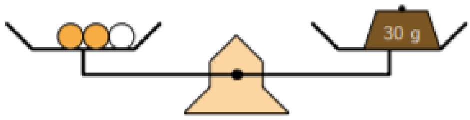
24. Op de weegschalen liggen 3 even zware witte ballen en 6 even zware gekleurde ballen. Hoeveel wegen de 9 ballen samen?

A 90 g B 94 g C 96 g D 99 g E 100 g

Heuristiek: de vraag vervangen door een eenvoudiger vraag

De vraag is ‘Hoeveel wegen de 6 gekleurde en 3 witte ballen samen?’ We vervangen deze vraag door ‘Hoeveel wegen 2 gekleurde en 1 witte bal?’
Hiervoor nemen we uit de rechtse weegschaal aan beide kanten een gekleurde bal weg.

2 gekleurde en 1 witte bal wegen 30 g. De 6 gekleurde en 3 witte ballen wegen dus 90 g.



Antwoord: A

<u>Voorbeeld 4</u> (Bron: Wallabi 2020 vraag 9)

9. Als Robbe met de bus heen en terug naar school gaat, is zijn reistijd 1 uur. Als hij met de bus naar school gaat en te voet terug naar huis gaat, is zijn reistijd 3 uur. Hoe lang doet Robbe erover als hij te voet heen en terug gaat?

A 3,5 uur B 4 uur C 4,5 uur D 5 uur E 5,5 uur

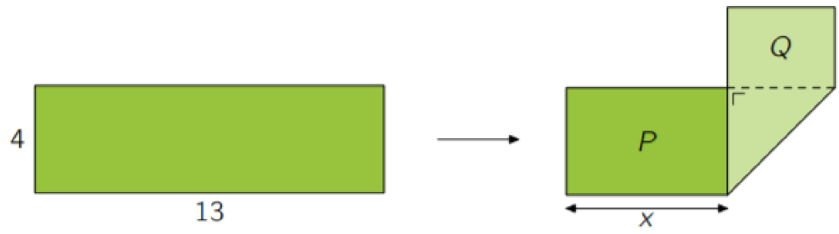
Heuristiek: opsplitsen in deelproblemen

Wat is de reistijd van een enkele rit met de bus? 0,5 uur (1 : 2 = 0,5)
Hoe lang doet Robbe er te voet over om van school naar huis te gaan? 2,5 uur (3 - 0,5 = 2,5)
Hoe lang doet Robbe erover als hij te voet heen en terug gaat? 5 uur (2 x 2,5 = 5)

Antwoord: D

Voorbeeld 5 (Bron: Wallabi 2021 vraag 20)

20. Timon vouwt een rechthoek zoals in de figuur. Hij ziet nu 2 rechthoeken met oppervlakten P en Q. Timon weet dat $P = 2 \cdot Q$. Hoeveel is x?



(A) 5 (B) 5,5 (C) 6 (D) 6,5 (E) 7

Heuristiek: opstellen van een vergelijking, aanduiden van de afmetingen op de figuur

De lengte van de oorspronkelijke rechthoek is 13.

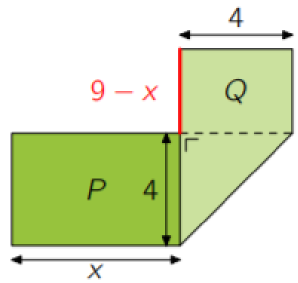
De lengte van het rode lijnstuk is $9-x$ (namelijk: $(13-x)-4$)

De oppervlakte P is $4x$.

De oppervlakte Q is $4.(9-x)$ of $36-4x$.

P = 2.Q dus: $4x = 2.(36-4x)$

Als we deze vergelijking oplossen bekomen we $x = 6$.



Antwoord: C

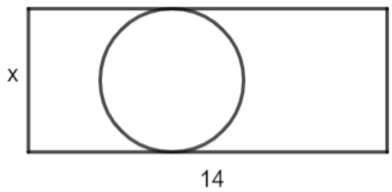
Voorbeeld 6 (Bron: JWO 2021 eerste ronde vraag 3)

3. Wat is de omtrek van de grootste cirkel die kan worden getekend in een rechthoek met omtrek 40 en lengte 14?

(A) 6π (B) 9π (C) 12π (D) 13π (E) 14π

Heuristiek: maken van een schets, opstellen van een vergelijking

Uit de schets blijkt dat de breedte (= x) van de rechthoek de diameter van de cirkel is. Met de formule voor de omtrek van een rechthoek kunnen we de vergelijking $40 = 2.(x+14)$ opstellen. De oplossing van deze vergelijking is 6.



De straal van de cirkel is dus 3, waardoor de omtrek 6π $(= 2\pi.r)$ is.

Antwoord: A

Voorbeeld 7 (Bron: JWO 2020 eerste ronde vraag 9)

9. In de biowinkel koop je met T stukken van 20 eurocent L liter melk. Hoeveel liter melk koop je met E stukken van 1 euro?

(A) $\frac{5EL}{T}$ (B) $\frac{5ET}{L}$ (C) $\frac{5E}{LT}$ (D) $\frac{EL}{5T}$ (E) $\frac{ET}{5L}$

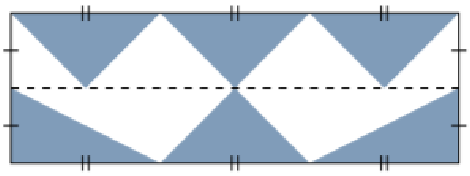
Heuristiek: rekenen met verhoudingen

T stukken van 20 cent	↔	L liter melk
1 stuk van 20 cent	↔	L/T liter melk
1 stuk van 1 euro	↔	5L/T liter melk
E stukken van 1 euro	↔	5LE/T liter melk

Antwoord: A

<u>Voorbeeld 8</u> (Bron: VWO 2019 eerste ronde vraag 1)

1. Welk percentage van de rechthoek is ingekleurd?



A 30 % B 40 % C 45 % D 50 % E 55 %

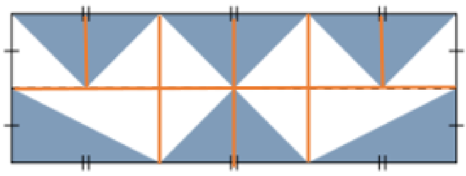
Heuristiek: rekenen met eenvoudige getallen

We kiezen eenvoudige afmetingen voor de lengte en de breedte van de rechthoek: lengte = 3 en breedte = 2. De oppervlakte van de rechthoek is 6 (= 3 x 2).
Het gekleurde deel bestaat uit 6 driehoeken met gelijke oppervlakte (basis = 1, hoogte = 1). De oppervlakte van het gekleurde deel is dus 3 (= 6 x 1/2). De helft van de rechthoek is ingekleurd.

Antwoord: A

Alternatief: verbanden zoeken tussen meetkundige figuren

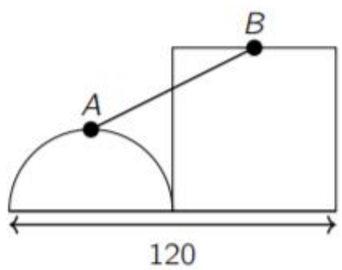
We tekenen enkele hulplijnen zodat er congruente witte en gekleurde driehoeken ontstaan. Zo zien we dat het witte gebied dezelfde oppervlakte heeft als het gekleurde deel.



Sommige leerlingen zullen deze hulplijnen niet nodig hebben om dit verband terug te vinden.

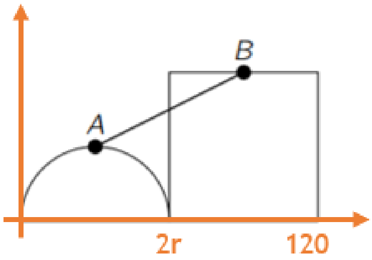
<u>Voorbeeld 9</u> (Bron: VWO 2019 eerste ronde vraag 28)

28. Op een lijnstuk met lengte 120 tekenen we een halve cirkel en een aangrenzend vierkant, zoals in de figuur. Noem A het hoogste punt van de cirkel en B het midden van de bovenste zijde van het vierkant. Voor welke straal van de cirkel is $|AB|$ minimaal?



A 25 B 30 C 40 D $10\pi + 15$ E $15\pi + 5$

Heuristiek: invoeren van een assenstelsel



We voeren een assenstelsel in zoals op de figuur. De straal van de cirkel is r.
De x-coördinaat van B is $60+r\ (=2r+(120-2r)/2)$. De andere coördinaten kunnen afgelezen worden. We bekomen $A(r,r)$ en $B(60+r,120-2r)$. Nu kunnen we de lengte van $[AB]$ berekenen.

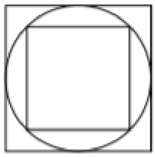
$$|AB|=\sqrt{60^2+(120-3r)^2}$$

Deze lengte is minimaal als $120-3r=0$, dus als $r=40$.

Antwoord: C

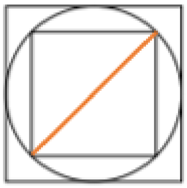
<u>Voorbeeld 10</u> (Bron: VWO 2021 tweede ronde vraag 5)

5. Wat is de verhouding tussen de oppervlaktes van een omgeschreven en een ingeschreven vierkant van een cirkel?



(A) $\sqrt{2}$	(B) 1,5	(C) $\sqrt{3}$	(D) 2	(E) 8

Heuristiek: rekenen met eenvoudige getallen



We kiezen 1 als lengte van de zijde van het kleinste vierkant. De lengte van het gekleurde lijnstuk is dan $\sqrt{2}$ (stelling van Pythagoras). Dit is de diameter van de cirkel, dus ook de lengte van de zijde van het grote vierkant.

Oppervlakte kleine vierkant = 1.1 = 1

Oppervlakte grote vierkant = $\sqrt{2}.\sqrt{2}$ = 2

De gevraagde verhouding is dus 2.

Antwoord: D

5 Websites

Op onderstaande websites staan veel inspirerende voorbeelden. Er komen zowel wiskundige contexten als contexten uit andere domeinen aan bod.

- www.kangoeroe.org

  Bij 'oefenen' kun je alle vragen van de voorbije jaargangen van de verschillende wiskundewedstrijden terugvinden:
  - Koala - doelgroep: vijfde en zesde leerjaar basisonderwijs
  - Wallaroe - doelgroep: eerste graad B-stroom
  - Wallabie - doelgroep: eerste graad A-stroom

  Bij 'oefenen' kun je onder 'klasmateriaal' themablaadjes downloaden voor het werken aan probleemoplossende vaardigheden en het gebruik van heuristiek.

- www.vwo.be

  Bij ‘oefenen’ kun je alle vragen van de voorbije jaargangen van JWO en VWO terugvinden:
    - Junior Wiskunde Olympiade – doelgroep: tweede graad so
    - Vlaamse Wiskunde Olympiade – doelgroep: derde graad so

  Bij ‘oefenen’ vind je ook een link naar usolv-it. Dit is een online platform waar heel wat inspiratie terug te vinden is.

- https://www.usolvit.be

  Usolv-it is een oefen-, toets- en inspiratieplatform. Je vindt op dit platform meer dan 19000 oefeningen die naar eigen inzicht gecombineerd kunnen worden tot oefenreeksen voor jouw leerlingen. Ook de oefeningen van ijkingstoetsen, toelatingsexamens en olympiades zijn hier beschikbaar.

- https://www.math4all.nl/

  Op deze website vind je les- en oefenmateriaal over de verschillende leerinhouden wiskunde van het so. Hier vind je tal van inspirerende opdrachten die ook ingezet kunnen worden om bij leerlingen de probleemoplossende vaardigheden te versterken.

- https://www.ijkingstoets.be/

  Bij ‘vind jouw ijkingstest’ kun je per richting van het hoger onderwijs een aantal ijkingstoetsen van de voorbije jaren raadplegen.

- https://www.alleexamens.nl/

  Op deze website staan de centrale examens uit Nederland van de voorbije jaren. Via ‘Examens vwo’, ‘Examens havo’ en ‘Examens vmbo’ kun je de examens wiskunde raadplegen.

  Duiding bij de verschillende onderwijsniveaus:

    - Het voorbereidend wetenschappelijk onderwijs of vwo is een 6-jarige opleiding. Deze bereidt leerlingen voor op hogere studies aan de universiteit (wetenschappelijk onderwijs).
    - Het hoger algemeen voortgezet onderwijs of havo is een 5-jarige opleiding. Deze bereidt leerlingen voor op het hoger beroepsonderwijs of op een doorstroming naar het vwo.
    - Het voorbereidend middelbaar beroepsonderwijs of vmbo is een 4-jarige opleiding en bestaat uit 4 leerwegen:
        - Theoretische leerweg (TL): leerlingen volgen over het algemeen alleen algemeen vormende vakken (avo-vakken).
        - Gemengde leerweg (GL): leerlingen volgen een avo-vak minder en krijgen 4 uur beroepsgericht onderwijs. De avo-vakken zijn van hetzelfde niveau als in de theoretische leerweg.
        - Kaderberoepsgerichte leerweg (KB): leerlingen volgen 12 uur beroepsgericht onderwijs. De avo-vakken zijn van een iets lager niveau dan in de gemengde en de theoretische leerweg.
        - Basisberoepsgerichte leerweg (BB): leerlingen volgen 12 uur beroepsgericht onderwijs. De avo-vakken zijn van een iets lager niveau dan in de kaderberoepsgerichte leerweg.