Dienst Curriculum & vorming
Team secundair onderwijs
Guimardstraat 1 - 1040 BRUSSEL
www.katholiekonderwijs.vlaanderen

Afstemming leerplan B+S met STEMmige contexten (3de graad DA-finaliteit)

2024-12-20

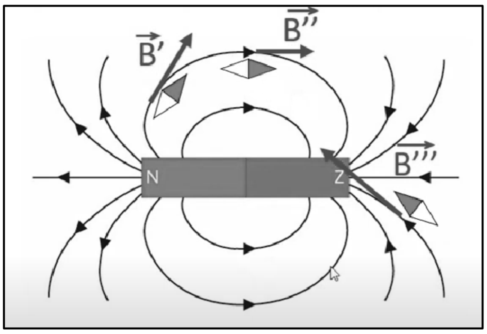
Om in de derde graad van de dubbele finaliteit meer betekenis te geven aan de wiskundige concepten kunnen we best op regelmatige basis verbanden leggen met de inhouden van de specifieke studierichtingsleerplannen. Bovendien kunnen we op die manier wellicht de motivatie van de leerlingen voor het vak wiskunde verhogen. Overigens werken we zo aan leerplandoel 1 van het leerplan wiskunde voor de dubbele finaliteit van de derde graad. De leerlingen moeten volgens dit doel fenomenen uit de realiteit beschrijven aan de hand van wiskundige concepten. Dit kan door voldoende richtingspecifieke contexten aan bod te laten komen. In deze tekst geven we enkele, hopelijk, inspirerende voorbeelden van deze benadering. De wiskundige concepten zijn geplukt uit leerplan B+S voor de dubbele finaliteit van de derde graad, de contexten komen letterlijk uit het specifieke studierichtingsleerplan voor de derde graad van de richting elektromechanische technieken, hierna EMT genoemd. Leerplandoelen voor deze richting komen overigens ook terug in andere leerplannen van de dubbele finaliteit. De tekst is vooral gericht op leerkrachten die wiskunde geven in het studiedomein STEM.

De wiskundige concepten die zich lenen tot deze benadering zijn:

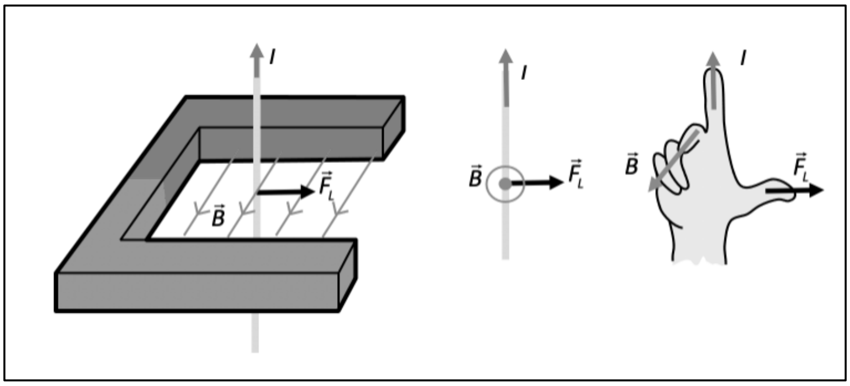
- rekenen met vectoren in het vlak
- grafisch onderzoek van functies
- machten en logaritmen
- exponentiële functies
- goniometrische functies
- tweedegraadsfuncties en -vergelijkingen
- differentiequotiënten
- afgeleiden

Voorbeeld 1: vectoren in het vlak

In EMT luidt leerplandoel 21 als volgt: leerlingen lichten magnetische pool, poolas en het verloop van de magnetische veldlijnen toe bij een permanente magneet en elektromagneet. Een extra doel bij dit leerplandoel vraagt de vectoriële benadering van het magnetisch veld en de magnetische veldsterkte. Bekijk onderstaande figuur. De magnetische veldlijnen bepalen de richting van de magnetische veldsterkte $\vec{B}$. De norm van deze vector geeft aan hoe sterk het magnetisch veld is in een bepaald punt. Merk in onderstaande figuur op dat de norm van de magnetische veldsterktevector toeneemt naarmate je dichter bij de polen van de magneet komt.



Een andere vectoriële toepassing zien we bij doel 22 van leerplan EMT: de leerlingen verklaren het verband tussen de lorentzkracht en de stroom door een stroomvoerende rechte geleider en een spoel. De lorentzkracht $\vec{F}_L$ grijpt aan op een stroomvoerende geleider in een magnetisch veld. Veronderstel dat de geleider een lengte l heeft, de stroomsterkte gelijk is aan I en de magnetisch veldsterkte wordt voorgesteld met vector $\vec{B}$. Bekijk volgende figuur.



Omdat het vectorieel product in de dubbele finaliteit niet wordt bestudeerd, moeten we ons hier behelpen met de rechterhandregel om de zin van de lorentzkracht te bepalen. De norm $\|\vec{F}_L\|$ van de lorentzkracht wordt berekend met de formule

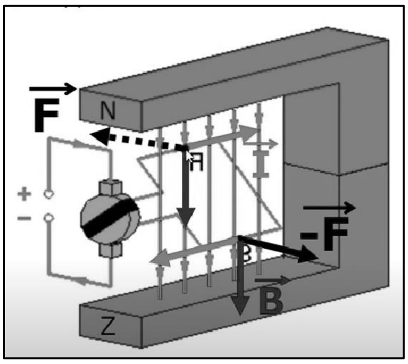
$$\|\vec{F}_L\| = B \cdot l \cdot I \cdot \sin \alpha$$

Hierbij is α de hoek tussen de stroomvoerende geleider en de magnetische veldsterkte $\vec{B}$. Indien de geleider en de magnetische veldsterkte loodrecht staan, wordt bovenstaande formule herleid naar

$$\|\vec{F}_L\| = B \cdot l \cdot I$$

In dit geval is de kracht dus recht evenredig met de magnetische veldsterkte, maar ook met de lengte en de stroomsterkte.

Om de meeste technische toepassingen te begrijpen, volstaat het te weten wat de zin is van de lorentzkracht. De bekendste toepassing is de gelijkstroommotor. Bekijk volgende figuur.



De gelijkspanningsbron zorgt voor een elektrische stroom in het rechthoekig kader. Op beide horizontale delen van dit kader werken tegengestelde lorentzkrachten die zorgen voor de rotatie. Dit is een toepassing van de som van vectoren.

In beide bovenstaande beschrijvingen wordt het concept vector enkel gebruikt om natuurkundige wetten of technische systemen te begrijpen. Er wordt niet gerekend met vectoren of gewerkt met componenten van die vectoren, wat wel een doel is in het leerplan wiskunde. Rekenen met vectoren moet wel gebeuren bij leerplandoel 35 van EMT: de leerlingen stellen de krachten- en krachtenmomentbalans op in functie van statisch evenwicht in 3D.

Rekenen met vectoren in de ruimte doe je best door gebruik te maken van de componenten volgens x-, y- en z-as. Dit is een haalbare veralgemening van doel 5 van het leerplan wiskunde, het kan bij wiskunde een eigen doel zijn ter ondersteuning van de collega mechanica. De x-, y- en z-componenten van de resulterende kracht $\vec{F}_{res}$ zijn de sommen van respectievelijk de x-, y- en z-componenten van de n inwerkende krachten $\vec{F}_i$. Voor de x-component van de resulterende kracht $\vec{F}_{res}$ geldt dan bijvoorbeeld

$$F_{resx} = \sum_{i=1}^{n} F_{ix}$$

De componenten van de inwerkende krachten kunnen eventueel berekend worden met goniometrische formules die gezien zijn in de tweede graad.

Het moment $\vec{M}$ van een kracht $\vec{F}$ met componenten $\vec{F}_x, \vec{F}_y$ en $\vec{F}_z$ en het aangrijpingspunt met coördinaat (x, y, z) ten opzichte van de oorsprong is een vector met volgende coördinaatgetallen:

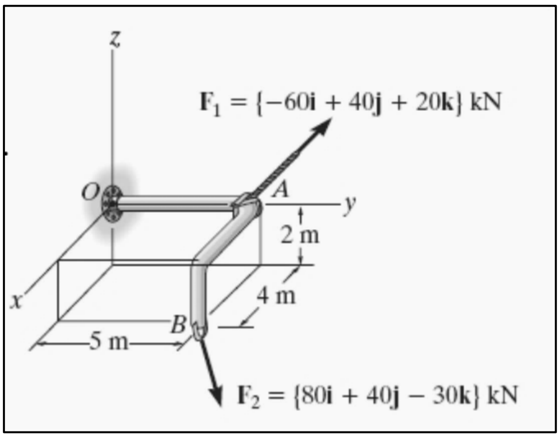
$$\begin{cases} M_x = y \cdot F_z - z \cdot F_y \\ M_y = z \cdot F_x - x \cdot F_z \\ M_z = x \cdot F_y - y \cdot F_x \end{cases}$$

De componenten van het resulterend moment $\vec{M}_{res}$ van de inwerkende krachten kunnen opnieuw berekend worden door alle componenten van de inwerkende krachtmomenten op te tellen. Aangezien dit bij meerdere inwerkende krachten kan leiden tot tijdrovend rekenwerk suggereert het leerplan EMT hier een rekenblad te gebruiken.

De evenwichtsvoorwaarde kan uitgedrukt worden door alle componenten van de resulterende kracht en het resulterend krachtmoment gelijk te stellen aan nul. Dat verstaan we onder het opstellen van de krachten- en momentenbalans.

Resulterend moment ten opzichte van de oorsprong: rekenvoorbeeld

Bekijk volgende figuur van een buizenstelsel waarop twee krachten inwerken.



Gegevens: $co(A) = (0,5,0); co(B) = (4,5,-2); co(\vec{F_1}) = (-60,40,20); co(\vec{F_2}) = (80,40,-30)$

Moment van $\overrightarrow{F_1}$ ten opzichte van de oorsprong:

$(5 \cdot 20 - 0 \cdot 40; 0 \cdot (-60) - 0 \cdot (-2); 0 \cdot 40 - 5 \cdot (-60)) = (100; 0; 300)$

Moment van $\overrightarrow{F_2}$ ten opzichte van de oorsprong:

$(5 \cdot (-30) - (-2) \cdot 40; (-2) \cdot 80 - 4 \cdot (-30); 4 \cdot 40 - 5 \cdot 80) = (-70; -40; -240)$

Het resulterend moment van beide krachten heeft bijgevolg de coördinaat $(30; -40; 60)$.

De grootte van dit resulterend moment wordt dan via vectoriële benadering gelijk aan $\sqrt{30^2 + 40^2 + 60^2}\ \mathrm{Nm}$.

Voorbeeld 2: goniometrische functies

Een evidente toepassing van de functie $f(x) = a \cdot \sin\big(b \cdot (x - c)\big)$, die voorkomt in het leerplan wiskunde vinden we terug bij leerplandoel 23 van het leerplan EMT: de leerlingen lichten het opwekken van een eenfasige en driefasige wisselspanning door verandering van magnetische flux toe.

De theoretische functiewaarden $f(x)$ kunnen meer betekenis krijgen door ze te vervangen door de grootte van de elektrische spanning U in functie van de tijd: $f(x)$ wordt dan $U(t)$. Indien we de parameters a en b positief nemen, blijft a bij de toepassing de amplitude van de wisselspanning, $\frac{b}{2\pi}$ wordt de frequentie van de wisselspanning en parameter c wordt de faseverschuiving in radialen t.o.v. de spanning met beginfase nul. De periode T van de wisselspanning wordt bepaald door de formule $\frac{2\pi}{b}$. De grootte van de wisselspanning wordt meestal uitgedrukt met zijn effectieve waarde U_{eff}. Die vinden we door de amplitude a te delen door $\sqrt{2}$.

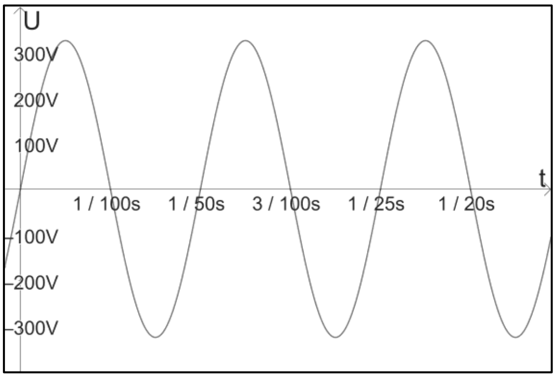
Rekenvoorbeeld:

Indien de effectieve waarde van een eenfasige wisselspanning 230 V bedraagt, de frequentie gelijk is aan 50 Hz en de beginfase nul bedraagt, dan kunnen we spanning $U(t)$ noteren met de formule

$$U(t) = \sqrt{2} \cdot 230\ V \cdot \sin(100\pi t)$$

op voorwaarde dat de tijd wordt uitgedrukt in seconden.

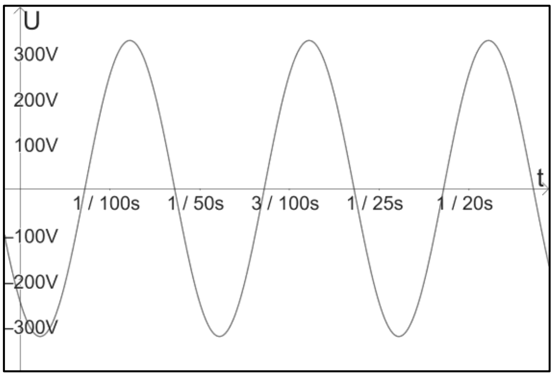
Grafisch wordt dit



Bij dezelfde amplitude en frequentie en een faseverschuiving van $\frac{\pi}{3}$ ten opzichte van vorige spanning krijgen we de formule

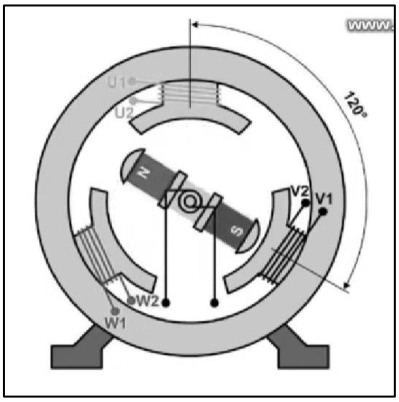
$$U(t) = \sqrt{2} \cdot 230\ V \cdot \sin\left(100\pi\left(t - \frac{\pi}{3}\right)\right)$$

Dat levert volgende grafiek op.

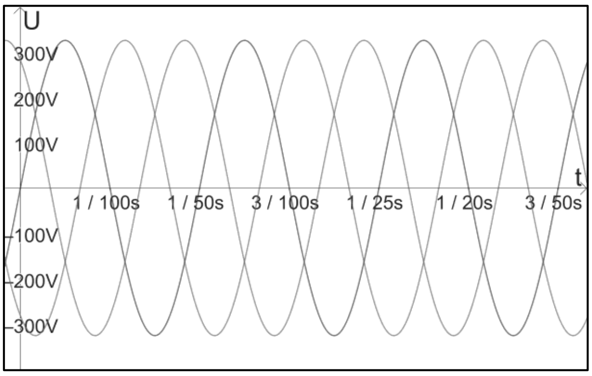


Dit waren voorbeelden van wisselspanning met één fase. Dat krijgen we indien we zorgen voor een veranderende magnetische flux door één spoel.

Bij driefasige wisselspanning wordt de spanning afgetakt over drie verschillende spoelen. Die worden in onderstaande figuur voorgesteld met U, V en W. Het wisselend magnetisch veld wordt in deze figuur symbolisch voorgesteld door een ronddraaiende magneet die dus voor een veranderlijke magnetische flux zorgt in de drie spoelen. De door deze spoelen opgewekte wisselspanningen bereiken op verschillende momenten hun maximale waarden. Zij wekken wisselspanningen op met onderlinge faseverschuivingen van 120° en 240°, in radialen worden die $\frac{2\pi}{3}$ en $\frac{4\pi}{3}$.



De grafieken van deze drie wisselspanningen, samen de driefasige wisselspanning genoemd, zien er dan als volgt uit:



Voorbeeld 3: tweedegraadsfuncties

De meest voor de hand liggende toepassingen van tweedegraadsfuncties situeren zich in de bewegingsleer. Leerplandoel 34 van het leerplan EMT vraagt het volgende: de leerlingen leggen het verband tussen positie, tijdstip, de ogenblikkelijke en gemiddelde waarde van snelheid en versnelling bij de horizontale worp.

Een horizontale worp is de combinatie van een horizontale beweging die eenparig verloopt en een vrije valbeweging, dus een verticale eenparig veranderlijke beweging. Veronderstel dat we de beweging beschrijven t.o.v. een orthogonaal assenstelsel waarbij de x-as zich op de grond situeert, de y-as verticaal naar boven gericht is en de beginpositie van het horizontaal geworpen object bevat. We kunnen de positie van het horizontaal geworpen object beschrijven met volgende bewegingsvergelijkingen:

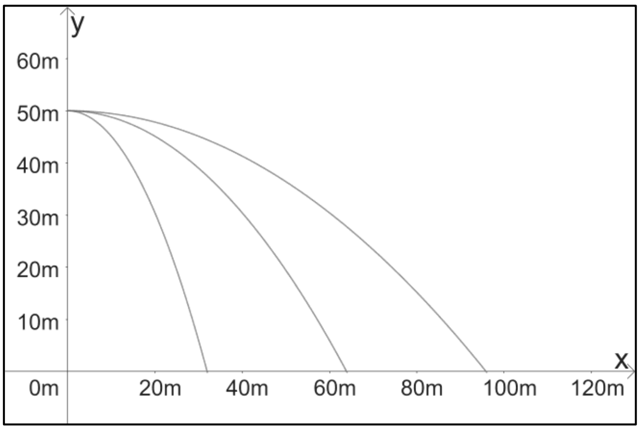
$$\begin{cases} x(t) = v_0 \cdot t \\ y(t) = y_0 - \dfrac{g \cdot t^2}{2} \end{cases}$$

Hierbij zijn v_0 de grootte van de horizontale beginsnelheid, y_0 de beginhoogte en g de valversnelling. Indien we de tijd tussen beide vergelijkingen elimineren, dan krijgen we de vergelijking van de gevolgde baan. Dat resulteert in volgende vergelijking:

$$y = y_0 - \frac{g \cdot x^2}{2 \cdot {v_0}^2}$$

Als we deze formule vergelijken met de algemene vergelijking $y = ax^2 + bx + c$ van de grafiek van een tweedegraadsfunctie, dan zien we dat de baan een parabool is waarbij de wiskundige parameter b gelijk is aan 0 en waarbij de wiskundige parameter a gelijk is aan $-\frac{g}{2 \cdot {v_0}^2}$.

De y-as is daarom de symmetrieas van de beschreven parabool. We zien ook dat a negatief is, wat wijst op een bergparabool. We stellen ook vast dat de opening van de parabool nauwer wordt als $\frac{g}{2 \cdot {v_0}^2}$ groter wordt, wat zich voordoet als de beginsnelheid kleiner wordt. Hieronder zien we de voorstelling van enkele horizontale worpen met telkens de beginhoogte 50 m en verder beginsnelheden van 10 m/s, 20 m/s en 30 m/s.



Ook het onderdeel tweedegraadsvergelijkingen kan hier aan bod komen in rekenvraagstukken waarbij men bijvoorbeeld de dracht van de horizontale worp berekent. Met de dracht bedoelt men de afstand die het object horizontaal aflegt tot het op de grond terechtkomt.

Bij leerplandoel 34 wordt ook een extra doel geformuleerd, met name de beschrijving van de schuine worp. Evident zal ook deze baan een parabool zijn. De vergelijking van de baan is in dit geval complexer omdat de beginhoek ook deel uitmaakt van de bewegingsvergelijkingen.

Voorbeeld 4: differentiequotiënten en afgeleiden

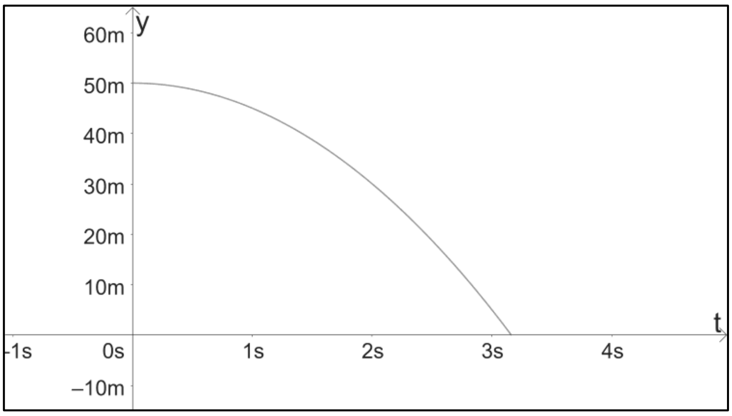
Leerplandoel 34 van EMT vraagt de bepaling van de gemiddelde en ogenblikkelijke snelheid bij een horizontale worp. Dit kan niet zonder bij aanvang te benadrukken dat de horizontale beweging eenparig verloopt terwijl de verticale een eenparig versnelde beweging is. Beide bewegingen gebeuren met een bepaalde snelheid en versnelling. De horizontale beweging verloopt met constante snelheid en versnelling nul, de verticale beweging is een vrije valbeweging met constante versnelling, zodat de snelheid van deze beweging lineair toeneemt met de tijd.

De vrije valbeweging kan gebruikt worden om de link te leggen tussen de gemiddelde en de ogenblikkelijke snelheid en de wiskundige concepten differentiequotiënt en afgeleide. In vorige paragraaf staat de hoogte in functie van de tijd weergegeven met de formule $y(t) = y_0 - \frac{g \cdot t^2}{2}$.

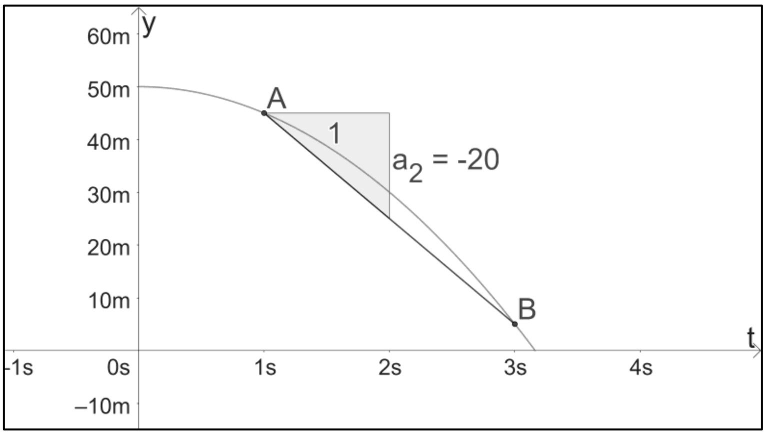
Indien we de valversnelling afronden naar 10 m/s² en de beginhoogte gelijk nemen aan 50 m, dan krijgen we volgende vergelijking:

$$y(t) = 50 - 5 \cdot t^2$$

De grafische voorstelling van deze formule ziet er als volgt uit:

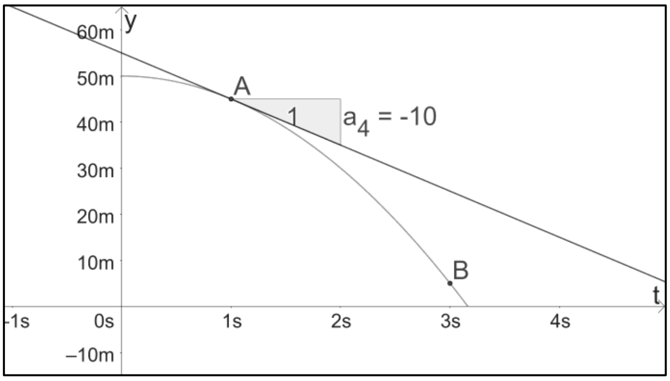


Beschouw nu de punten $A(1{,}45)$ en $B(3{,}5)$ op deze grafiek.



De grootte van de gemiddelde snelheid tussen A en B kan in verband gebracht worden met het differentiequotiënt van bovenstaande functie tussen deze punten. De absolute waarde van het differentiequotiënt is het maatgetal van de gemiddelde snelheid in meter per seconde, in dit geval dus 20 m/s.

Beschouw het tijdsinterval Δt dat verstrijkt tussen het vaste punt A en punt B en bepaal vervolgens de limiet voor Δt gaande naar nul van het eerder vernoemde differentiequotiënt. De rechte AB zal dan overgaan naar de raaklijn en het differentiequotiënt naar de richtingscoëfficiënt van deze raaklijn. Deze richtingscoëfficiënt kan in verband gebracht worden met de grootte van de ogenblikkelijke snelheid in punt A, m.a.w. na 1 seconde. Uiteraard is dit op die manier ook een toepassing van afgeleiden. Bekijk volgende figuur.



De afgeleide van deze functie voor t gelijk aan 1 is gelijk aan -10. De absolute waarde van deze afgeleide is gelijk aan het maatgetal van de ogenblikkelijke snelheid in meter per seconde na 1 seconde.

In plaats van de ogenblikkelijke snelheid te bepalen op 1 tijdstip kan je die ook weergeven in een formule waar de tijd als variabele voorkomt. Dan wordt de ogenblikkelijke snelheid een toepassing van een afgeleide functie.

Vertrek van de formule $y(t) = 50 - 5 \cdot t^2$ die het voorschrift weergeeft van een veeltermfunctie.

De afgeleide functie van deze veeltermfunctie wordt dan als volgt berekend:

$$y'(t) = Dy(t) = v_y(t) = -10t$$

Hieruit volgt dat $v_y(t = 1s) = -10 \text{ m/s}$

Ook via deze weg vinden we dat de grootte van de ogenblikkelijke snelheid na 1 seconde gelijk is aan 10 m/s.