
Vlakvullingen van een rechthoek: inductie en de rij van Fibonacci

2025-06-01

In het leerplan wiskunde voor de richtingen van de derde graad D-finaliteit met 12 graaduren wiskunde (III-WisS"-d) staat in de afbakening van het leerplandoel over bewijsvoering het bewijs door volledige inductie vermeld. In dit artikel onderzoeken we op hoeveel manieren je een rechthoek kunt betegelen met tegels van een bepaald formaat. Dit leidt tot een mooi voorbeeld van bewijsvoering met volledige inductie.

LPD 4 De leerlingen beargumenteren wiskundige redeneringen en bewijzen wiskundige uitspraken.

- ★ Bewijstechnieken: rechtstreeks bewijs, bewijs door volledige inductie, ontkrachting door tegenvoorbeeld
Kwantoren

Het is essentieel dat leerlingen niet alleen de redenering begrijpen, maar ook inzicht krijgen in de kracht van deze bewijsmethode. Door geregeld een bewijs door volledige inductie aan bod te laten komen, ontwikkelen ze hun logisch denkvermogen en leren ze omgaan met wiskundige argumentatie. Klassieke voorbeelden van bewijzen door volledige inductie zijn het binomium van Newton, de formule van de Moivre en de som van de eerste n kwadraten of derdemachten.

In dit artikel gaan we in op het aantal vlakvullingen van een rechthoek.

1 Het aantal vlakvullingen van een $1 \times n$ -rechthoek met 1×1 - en 1×2 -tegels

Onder een $1 \times n$ -rechthoek verstaan we een rechthoek met lengte n en breedte 1. We betegelen deze met 1×1 - en 1×2 -tegels. Elke mogelijke betegeling noemen we een vlakvulling van de $1 \times n$ -rechthoek. Op de afbeelding zie je een 1×1 - en 1×2 -tegels als ook een mogelijke vlakvulling van een 1×7 -rechthoek.



We willen het aantal manieren bepalen waarop een rechthoek van 1 bij n betegeld kan worden met tegels van 1×1 of 1×2 . We noteren dit aantal als $T(n)$. Er wordt beweerd dat dit gelijk is aan het $(n+1)$ -ste Fibonacci-getal. We noteren dit getal als F_{n+1} . We krijgen:

$$T(n) = F_{n+1}$$

We bewijzen deze bewering met volledige inductie.



De rij van Fibonacci

De rij van Fibonacci is een getallenrij waarbij elk getal gelijk is aan de som van de twee voorgaande getallen. De rij start als volgt:

$$F_1 = 1, F_2 = 1, F_3 = 2, F_4 = 3, F_5 = 5, F_6 = 8, \dots$$

De formele definitie luidt:

$$F_1 = 1, F_2 = 1, F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \text{ voor } n > 2$$

Via onderstaande tabel laten we leerlingen aanvoelen dat het aantal vlakvullingen van een $1 \times n$ -rechthoek wel degelijk het $(n+1)$ -ste Fibonacci-getal is. Je kan de leerlingen zelf alle mogelijke vlakvullingen laten zoeken en ze zo het verband zelf laten ontdekken. Dit verhoogt de motivatie voor het bewijs van het gevonden verband.

n	T(n)	F _{n+1}
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	5	5
5	8	8
...	...	...

We gaan nu bewijzen dat $T(n) = F_{n+1}$ voor alle natuurlijke getallen n , met behulp van **volledige inductie**.

Basisstappen

Voor $n = 1$ geldt:

Een 1×1 -rechthoek kan enkel betegeld worden met één 1×1 -tegels.

Dus:

$$T(1) = 1 = F_2$$

Voor $n = 2$ geldt:

Een 1×2 -rechthoek kan op twee manieren betegeld worden:

1. Met twee 1×1 -tegels naast elkaar.
2. Met één 1×2 -tegels.

Dus:

$$T(2) = 2 = F_3$$

Inductiehypothese

We veronderstellen dat de stelling klopt voor n en $n-1$, dus:

$$T(n) = F_{n+1} \text{ en } T(n-1) = F_n$$



Inductiestap

We tonen aan dat de stelling dan ook geldt voor $n+1$, dus dat:

$$T(n+1) = F_{n+2}$$

Om dit te bewijzen, bekijken we alle mogelijke manieren om een $1 \times (n+1)$ -rechthoek te betegelen.

Er zijn twee mogelijke manieren om te beginnen:

1. **We leggen eerst een 1×1 -tegels.**

Dan blijft er nog een $1 \times n$ -rechthoek over, die op $T(n)$ manieren betegeld kan worden.

2. **We leggen eerst een 1×2 -tegels.**

Dan blijft er nog een $1 \times (n-1)$ -rechthoek over, die op $T(n-1)$ manieren betegeld kan worden.

Daaruit volgt:

$$T(n+1) = T(n) + T(n-1)$$

Uit de inductiehypothese en de definitie van de rij van Fibonacci volgt:

$$T(n+1) = T(n) + T(n-1) = F_{n+1} + F_n = F_{n+2}$$

Conclusie

We hebben aangetoond dat de stelling geldt voor $n = 1$ en $n = 2$, en dat als ze geldt voor $n-1$ en n , ze ook geldt voor $n+1$. Daarom geldt de stelling voor alle natuurlijke getallen n .

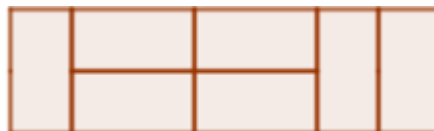
Het aantal manieren om een $1 \times n$ -rechthoek te betegelen met 1×1 - en 1×2 -tegels is dus inderdaad het $(n+1)$ -ste Fibonacci-getal.

2 Het aantal vlakvullingen van een $2 \times n$ -rechthoek met 1×2 -tegels

We willen het aantal manieren bepalen waarop een rechthoek van 2 bij n betegeld kan worden met tegels van 1×2 . We noteren dit aantal als $T(n)$. Er wordt beweerd dat dit opnieuw gelijk is aan het $(n+1)$ -ste Fibonacci-getal, met andere woorden:

$$T(n) = F_{n+1}$$

De afbeelding toont een mogelijke vlakvulling van een 2×7 -rechthoek.



We bewijzen deze bewering met volledige inductie. Dit bewijs verloopt volledig analoog als het vorige voorbeeld.



Basisstappen

Voor $n = 1$ geldt:

Een 2×1 -rechthoek kan slechts op één manier betegeld worden, namelijk met één 1×2 -tegels.

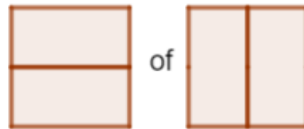
Dus:

$$T(1) = 1 = F_2$$

Voor $n = 2$ geldt:

Een 2×2 -rechthoek kan op twee manieren betegeld worden:

1. Met twee 1×2 -tegels onder elkaar.
2. Met twee 1×2 -tegels naast elkaar.



Dus:

$$T(2) = 2 = F_3$$

Inductiehypothese

We veronderstellen dat de stelling klopt voor n en $n-1$, dus:

$$T(n) = F_{n+1} \text{ en } T(n-1) = F_n$$

Inductiestap

We tonen aan dat de stelling dan ook geldt voor $n+1$, dus dat:

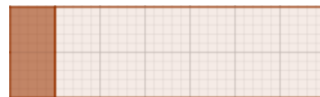
$$T(n+1) = F_{n+2}$$

Om dit te bewijzen, bekijken we alle mogelijke manieren om een $2 \times (n+1)$ -rechthoek te betegelen.

Er zijn twee mogelijke manieren om te beginnen:

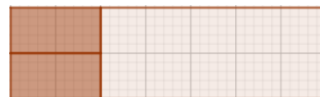
1. **We leggen eerst verticaal een 1×2 -tegels.**

Dan blijft er nog een $2 \times n$ -rechthoek over, die op $T(n)$ manieren betegeld kan worden.



2. **We leggen eerst twee 1×2 -tegels onder elkaar.**

Dan blijft er nog een $2 \times (n-1)$ -rechthoek over, die op $T(n-1)$ manieren betegeld kan worden.



Daaruit volgt:

$$T(n+1) = T(n) + T(n-1)$$

Uit de inductiehypothese volgt:

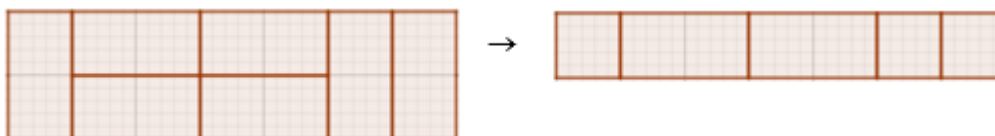
$$T(n+1) = T(n) + T(n-1) = F_{n+1} + F_n = F_{n+2}$$

Conclusie

We hebben aangetoond dat de stelling geldt voor $n = 1$ en $n = 2$, en dat als ze geldt voor $n-1$ en n , ze ook geldt voor $n+1$. Daarom geldt de stelling voor alle natuurlijke getallen n . Het aantal manieren om een $2 \times n$ -rechthoek te betegelen met 1×2 -tegels is dus inderdaad het $(n+1)$ -ste Fibonacci-getal.

Opmerking

Door enkele vlakvullingen te tekenen zien we dat dit probleem te herleiden is naar het aantal vlakvullingen van een $1 \times n$ -rechthoek met 1×1 - en 1×2 -tegels.



Dit verklaart waarom we bij beide voorbeelden hetzelfde aantal bekomen.

Mogelijke differentiatie

Sterkere leerlingen kun je in verschillende situaties een recursieformule voor het aantal vlakvullingen van een rechthoek laten zoeken.

We geven enkele voorbeelden:

- het aantal vlakvullingen $T(n)$ van een $3 \times n$ -rechthoek met 1×3 -tegels;
Antwoord: $T(1) = 1$, $T(2) = 1$, $T(3) = 2$ en $T(n) = T(n-1) + T(n-3)$ voor $n > 3$
- het aantal vlakvullingen $T(n)$ van een $2 \times n$ -rechthoek met 1×2 - en 2×2 -tegels;
Antwoord: $T(1) = 1$, $T(2) = 3$ en $T(n) = T(n-1) + 2 \cdot T(n-2)$ voor $n > 2$

Leerlingen kunnen bij elk voorbeeld voor een aantal n -waarden alle vlakvullingen tekenen. Zo kunnen ze telkens de recursieformule voor het aantal vlakvullingen ontdekken.

Wil je nog wat meer uitdaging? We geven nog twee complexere voorbeelden:

- het aantal vlakvullingen $T(n)$ van een $3 \times 2n$ -rechthoek met 1×2 -tegels.
Antwoord: $T(1) = 3$, $T(2) = 11$ en $T(n) = 4 \cdot T(n-1) - T(n-2)$ voor $n > 2$
- het aantal vlakvullingen $T(n)$ van een $2 \times n$ -rechthoek met 1×1 - en 1×2 -tegels.
Antwoord: $T(1) = 2$, $T(2) = 7$, $T(3) = 22$ en $T(n) = 3 \cdot T(n-1) + T(n-2) - T(n-3)$ voor $n > 3$

In het voorlaatste voorbeeld is de lengte van de rechthoek $2n$. Laat leerlingen verklaren waarom er voor rechthoeken met een oneven lengte geen enkele vlakvulling mogelijk is.

