

Mathematiseren, een kern van wiskundige vorming

In de leerplannen van de derde graad komt een nieuw onderwerp voor: **mathematiseren**, of voluit: **mathematiseren en oplossen van problemen**. Het is een verplicht onderwerp in de TSO-studierichtingen en een keuzeonderwerp in de ASO-studierichtingen.

Bij het lezen van de doelstellingen valt het onmiddellijk op, dat dit onderwerp van een andere aard is dan de overige onderwerpen en dan gebruikelijk is in de wiskundeleerplannen. Meestal zijn de onderdelen en de doelstellingen van het leerplan vakinhoudelijk gekleurd (zeg maar analyse, algebra ...). De doelstellingen bij het onderdeel *mathematiseren* hebben die inhoudelijke component niet. Samen met de expliciete rubrieken over vaardigheden en attitudes is dit onderwerp een van de vernieuwingen in het leerplan wiskunde.

Uit contacten met leraren blijkt dat er een aantal problemen zijn met de interpretatie. Deze tekst wil een ondersteuning zijn bij die interpretatie. Overigens, als je twijfelt aan de invulling en de interpretatie van het leerplan zoals je die nu concreet uitvoert in de klas, contacteer de begeleiding wiskunde hierover. Ze zal je graag ondersteunen.

Situering van het onderwerp

Aan de basis van het uitschrijven van dit thema binnen de leerplannen wiskunde lagen twee verschillende oorzaken. Enerzijds, en de belangrijkste oorzaak, wilde de leerplancommissie ruimte vrij maken voor effectieve aandacht aan zeer belangrijke wiskundige vormingsdoelen: het leren oplossen van problemen. Anderzijds bood het onderwerp de mogelijkheid om tegemoet te komen aan de vraag vanuit een aantal TSO-studierichtingen om bepaalde praktische toepassingen met gebruik van wiskunde aan bod te brengen, zonder dat die echter in een grondige studie voorbereid worden.

Wiskunde is sinds mensenheugenis verbonden met het leren oplossen van problemen, zeg maar vraagstukken. Zij het dat de invulling van het huidige probleemoplossende denken heel wat verder gaat dan de klassieke vraagstukken. Uiteraard is wiskunde niet het enige vormende vak voor deze vaardigheden. Toch is wiskunde een vak bij uitstek om ze te verwerven. Dat kan zijn in zeer veilige leersituaties waarin de probleemoplossende vaardigheden via kleine stapjes relatief gestuurd aan bod komen. Sturing die voor verschillende leerlingen ook verschillend kan zijn. Het kan ook gebeuren via een meer confronterende aanpak met 'reële' probleemsituaties waarin de wiskundige methodiek niet voor de hand ligt. Sterke differentiatie is inherent aan de wiskundeaanpak, die dus nauw kan aansluiten bij het stadium van vaardigheid dat leerlingen hebben.

Wiskundeproblemen lenen zich gemakkelijk tot het gebruik van heuristiek zoals

- gegevens en vraag onderzoeken,
- een vermoeden formuleren en dat uittesten met voorbeelden,
- de relaties tussen gegevens en vraag onderzoeken en beschrijven,
- een gegeven even constant houden om het probleem tijdelijk beter te kunnen beschrijven,
- een deelprobleem bekijken,
-

Toch moeten we als wiskundeleraren erkennen dat de wiskundevorming in het recente verleden weinig specifieke aandacht besteedde aan het aanleren van heuristiek. Probleemoplossende vaardigheden waren een inherent en leuk meegenomen nevenproduct van het leren van wiskunde-inhouden. Sinds enkele decennia is er echter een duidelijke stroming op gang gekomen om veel explicieter aandacht te besteden aan deze probleemoplossende vaardigheden. In de wiskundevorming is het werk van Polya (eerste helft twintigste eeuw) en Schoenfeld (1985) uitgegroeid tot een niet te verwaarlozen

standaard. Daaruit blijkt dat de inherente verwerving van probleemoplossende vaardigheden niet zo evident is als vermoed werd. Ze worden beter expliciet in het wiskundig leerproces opgenomen.

Ook bij de leeropvattingen in de leerpsychologie is er heel wat meer aandacht ontstaan voor het steeds beter en uitdrukkelijker terugkijken op het uitgevoerde proces. Studies tonen aan dat expliciet en intentioneel aandacht besteden aan heuristiek en aan probleemoplossende vaardigheden, de kwaliteit van probleemaanpak merkwaardig sterk verbeteren. Reflectie op het eigen denken en handelen moet integrerend deel uitmaken van een leer- en oplossingsproces.

In die zin heeft de leerplancommissie wiskunde ruimte willen vrijmaken om expliciet aandacht te besteden aan deze vaardigheden. Daarbij gaat het niet om nieuwe inhouden, maar wel om een efficiënter leren gebruiken van de beschikbare kennis en vaardigheden om problemen aan te pakken. Met eventueel, als de noodzaak zich voordoet, het creëren van 'nieuwe' wiskunde om het probleem aan te pakken, als de beschikbare kennis toch ontoereikend blijkt. (Wat weer een andere kijk geeft op het verwerven van kennis, m.n. kennis kan geconstrueerd worden als die nodig is). Dit onderdeel bevat dus andere doelen dan inhoudelijke doelen. Het gaat ook om andere leerprocessen. Ze hebben een ander karakter, vragen een andere didactische benadering. Het betekent dat in het leerproces precies het gebruik van heuristiek, het mathematiseringsproces op zich, het planmatig werken, het reflecteren op de oplossingswijze centraal worden geplaatst. En dat daarover "geleerd" wordt. Leraren wiskunde zijn daar wellicht minder vertrouwd mee.

Probleemoplossende vaardigheden hangen ook niet rechtstreeks af van de veelheid aan inhoudelijke kennis. Uiteraard is kennis fundamenteel belangrijk, zeker als het functionele kennisniveau bedoeld wordt. Maar iemand met veel feitenkennis is niet noodzakelijk een goede probleemoplosser. En ook vanuit een beperkt inhoudelijk instrumentarium kunnen goede vaardigheden opgebouwd worden, omdat het precies gaat over de wijze waarop je die weet in te zetten. Vandaar dat *mathematiseren* ook voor studierichtingen met twee of drie wekelijkse lestijden wiskunde als leerplanonderwerp werd weerhouden. Beschikken over probleemoplossende vaardigheden wil niet zeggen dat je alle problemen ook effectief kunt oplossen. Maar je beschikt wel over een wijze van omgaan met problemen, waarbij je kennisarsenaal maximaal rendeert.

In een aantal TSO-studierichtingen wil men vanuit de verantwoordelijke sector bepaalde instrumentele wiskundige elementen ter beschikking hebben. M.a.w. men wil bepaalde kennis en vaardigheden ter beschikking hebben om een onderdeel uit de technische vakken te onderbouwen (bijv. om een beter inzicht te hebben), zonder dat dit echter leidt tot het uitdiepen van het wiskundige onderwerp.

Bijvoorbeeld voor het gebruik van bepaalde freesmachines, boormachines, tekenmachines, ... wil men dat leerlingen enig inzicht hebben in transformaties van assenstelsels. De wiskundige onderbouw zou een deel analytische meetkunde zijn. Toch verkiest men een aanpak waarbij relatief snel de transformatieformules zichtbaar worden.

Een wiskundige aanpak zou soms te ver leiden en het wiskundige beheersingsniveau van de leerlingen overstijgen. Vandaar dat gezocht wordt om dergelijke problemen aan te pakken vanuit de realistische gegevenheid, waarbij men probeert deze 'te mathematiseren'. Het resultaat is een 'werkwijze' die in analoge situaties kan gehanteerd worden, zonder dat leerlingen de hele wiskundige achtergrond, laat staan fundering ervan, mee krijgen. De aanpak speelt dus in op een wiskundige vorming, die meer gericht is op een gebruikerswiskunde, dan wel op de fundamentele opbouw van het vakgebied.

Het onderwerp mathematiseren moet hier de ruimte bieden om leerlingen bij dergelijke aanpak maximaal leerrendement te geven, met name zowel op de beperkte aanvulling van de inhouden, als op het leerproces van de probleemaanpak. Dergelijke werkwijze zal wellicht voor heel wat leerlingen later ook deel uit maken van hun 'levenslang leren'.

Doelstellingen van het leerplan

MA1	Problemen herkennen, analyseren en de probleemstelling verhelderen met behulp van hun wiskundekennis.
MA2	Heuristische methodes gebruiken om een probleem aan te pakken.
MA3	Resultaten interpreteren binnen de context van het gestelde probleem.
MA4	Een reflecterende houding verwerven door gecontroleerd terugkijken op de oplossingsweg, het gekozen model en de uitgevoerde berekeningen.
MA5	Vertrouwen verwerven door hun wiskundekennis zinvol in te schakelen.

Proces van probleemaanpak

Over de processen om een probleem aan te pakken is al veel geschreven. Het zou kunnen volstaan om te verwijzen naar de vakliteratuur vakdidactiek. Ook de leerplannen gaan hierop uitgebreid in, bijvoorbeeld binnen de rubriek 'probleemoplossende vaardigheden'. De pedagogisch-didactische wenken bij het onderwerp *mathematiseren* geven al heel wat aanwijzingen. We beperken ons hier dan ook tot een aanvullend samenvatten.

Best is **vijf belangrijke ideeën of fasen** te onderscheiden.

- Een eerste fase is deze van het **exploreren van de situatie**. Dit kan zowel in een concrete of praktische probleemsituatie die men wil onderzoeken, als in de situatie van een opgegeven opdracht. Doel is de situatie en het probleem goed te begrijpen. Probleemoplossing begint dus met *een goede probleemstelling*.

In een praktische situatie zal men zoveel mogelijk relevante informatie proberen te verzamelen. En zal men het probleem *inzichtelijk* trachten te vatten. Bij vraagstukken gaat om het *begrijpen van de opdracht*, het verstaan van alle begrippen, het begrijpen van de feitelijke samenhang (die bijvoorbeeld kan ontleend zijn aan andere vakgebieden zoals wetenschappen, economie ...). Begrijpen betekent ook dat de mogelijk nuttige informatie wordt onderscheiden van overbodige informatie. Men zal ook de vraag zo duidelijk mogelijk omschrijven, desnoods al begrenzen (d.w.z. dat men ook op zoek gaat naar beperkende voorwaarden).

Een zinvolle werkwijze om het inzicht te testen is het vertalen, *vertolken in eigen woorden* van de probleemstelling.

- In een tweede fase volgt de **mathematisering**. Dat betekent dat de situatie *onder wiskunde gebracht* wordt (vergelijk met 'onder woorden brengen'). De situatie wordt wiskundig vertolkt.

Dit loopt vaak echter niet van een leien dakje. Hier komt de beschikbare *heuristiek* aan bod, bijvoorbeeld:

- het maken van een tekening om de situatie en de samenhang te verduidelijken;
- het formuleren van een (werk)hypothese of vermoeden, al enigszins rekening houdend met de vastgestelde wiskundige relaties;
- dat vermoeden een eerste maal toetsen op getallenvoorbeelden;
- het herformuleren van het probleem;
- het formuleren van deelproblemen; bijvoorbeeld door het constant houden van bepaalde veranderlijken;
-

Leerlingen zullen deze heuristiek maar opbouwen doorheen de aanpak van vele problemen, en in een geleidelijk proces, waarbij de succeservaring bij de aanpak hen vertrouwen geeft in die aanpak.

In dit proces wordt de *vorm van het wiskundige model* duidelijker. Wordt het een vergelijking, een stelsel, een extremumvraagstuk, een integraal, een matrixprobleem, een meetkundig probleem ...? En hoe kan die (op)gesteld worden, bijvoorbeeld wat is het functievoorschrift, het stelsel ...

Hier wordt ook duidelijk of de kennis toereikend is, en of er eventueel naar bijkomende kennis gezocht moet worden, bijvoorbeeld via vergelijking met eventuele andere situaties. In het voorbeeld van de tekenmachines worden leerlingen mogelijk geconfronteerd met een referentiestelsel van de tekenkop die moet bediend worden en een referentiestelsel op papier, zonder dat de verbinding tussen beide al duidelijk is. Het uitzoeken van het wiskundige verband kan dan zelfs als probleem op zich aan bod komen.

Bij een meetkundig probleem zal het mathematiseringsproces leiden tot het opstellen van een mogelijke constructie, of tot het vastleggen van (een) meetkundig verband(en), bijvoorbeeld onder de vorm van een hypothese, en mogelijk al tot een vermoeden van argumentatie.

Bij een statistisch probleem zal men de te onderzoeken grootheden en de wenselijke statistische parameters vastleggen en controleren of men over de nodige gegevens beschikt om die te berekenen.

Deze fase resulteert in het *formuleren* van het aangegeven probleem *als een wiskundig probleem*. Het probleem wordt vertolkt in *een wiskundige probleemstelling*.

Bij de fase van het mathematiseren hoort het *opstellen van een werkschema of werkplan* om op een gecontroleerde wijze de verschillende denkstappen uit te voeren. M.a.w. welke wiskundige bewerkingen, stappen moeten uitgevoerd worden om tot een oplossing te komen.

- In de derde fase volgt dan **het effectief uitvoeren van de geplande wiskundige handelingen** die nodig zijn om tot een oplossing van het wiskundig gestelde probleem te komen.

Belangrijk hierbij is de keuze van de wijze waarop het resultaat berekend (bekomen) wordt. In vele gevallen zal men een rekenmachine of software hanteren om de effectieve berekeningen uit te voeren.

Bij een meetkundig probleem kan dit leiden tot het effectief uitvoeren van een constructie, tot het beargumenteren van de samenhang of de geformuleerde hypothese of tot het netjes uitschrijven van een bewijs.

Deze fase leidt dus tot *een wiskundig antwoord* op het wiskundige probleem.

- In de vierde fase zal men de wiskundige oplossing **demathematiseren**. Dat betekent dat de wiskundige oplossing terug in de probleemcontext wordt gebracht en *getoetst op haalbaarheid en realiteitswaarde*. Het resultaat wordt dus *geïnterpreteerd*.
 - Bijvoorbeeld in het geval van een vraag naar 'aantallen' (bussen, paarden, werklieden ...) zal het wiskundige resultaat (bijv. 4,6) moeten afgerond of opgerond worden.
 - Bij een berekende rentevoet of interest zal het wiskundige resultaat aan de realiteit van wat haalbaar is in de sector getoetst worden.
 - Als een probleemstelling naar een grootteorde vraagt, zal men een afgerond getal als eindresultaat verkiezen (bijv. een beredeneerde schatting van het aantal betogers dat aan een bepaald punt voorbij komt, moet niet tot op de eenheid worden uitgedrukt).
 - De snelheid van een auto voor een bepaald traject zal ook getoetst worden aan de ethische verantwoordelijkheid. (Bijv. een snelheid van 150 km per uur voor een traject naar Zuid-Frankrijk is niet aanvaardbaar. Het vraagstuk heeft dan geen oplossing!? Er moet wellicht gesleuteld worden aan de beperkende randvoorwaarden.)

De interpretatie van het resultaat houdt meteen al een *reflectie op de oplossing* van het probleem in: "Is de gevonden oplossing effectief een oplossing voor het gestelde probleem?" Het gaat dus om meer dan een wiskundige proef op de som, die vaak ook maar slechts binnen de wiskundig gestelde situatie wordt uitgevoerd. Dit kan eventueel leiden tot de bijstelling van de probleemstelling, de wijziging van de wiskundige vertolking, het aanscherpen van de randvoorwaarden ... en dus tot het heroplossen van het probleem.

- Vijfde idee, en *niet zozeer als afzonderlijke of laatste fase* te begrijpen, is die van de **gecontroleerde uitvoering**. Vaak wordt deze verbonden met een proef (meestal wiskundige proef op het einde van het proces). Die is zeker zinvol.

Maar de *controleerende houding* in het uitvoeren moet al veel eerder aan bod komen in het proces. Die controleerende houding moet aanwezig zijn in alle fasen van het proces:

- bij het analyseren,
 - hebben we geen informatie over het hoofd gezien, hebben we de juiste informatie opgezocht, beschikken we over voldoende gegevens;
- bij het mathematiseren,
 - is de relatie duidelijk vertaald, vergeet men niet dat men bijkomende condities heeft opgelegd om het probleem haalbaar te maken...;
- bij het berekenen,
 - werden de wiskundige procedures juist uitgevoerd, werd een foutencontrole en proef uitgevoerd ...;
- bij de demathematisering,
 - zijn de voorwaarden terug ingebracht

Didactisch leerproces

Bij het onderwerp *mathematiseren* wordt er vanuit gegaan dat de leerlingen nog geen doorgedreven probleemoplossers zijn, m.a.w. dat ze nog een leerproces doormaken. Precies de leerlingen in dergelijke didactische leerprocessen brengen is de bedoeling van dit onderwerp.

Leerlingen kunnen dus *meer leren dan hoe concreet de oplossing berekenen* bij een probleem. Ze worden vertrouwd met de verschillende denkstappen, het gebruik van heuristiek, werkwijzen en attitudes binnen een proces van probleemaanpak. Het verschil met een proces waarin een wiskundig onderwerp wordt bestudeerd, een wiskundige methode geleerd wordt, is dat *de klemtoon niet ligt op de wiskundige inhoud* of op de wiskundige vaardigheid, *maar wel op het inzicht in hoe men het oplossingsproces heeft aangepakt*, welke stappen men gezet heeft, welke heuristiek men gehanteerd heeft, wat het resultaat is van de reflectie over de oplossingswijze. (Let wel, we pleiten ervoor dat deze aanpak ook gekoppeld zou worden aan die zogenaamd wiskundig inhoudelijke processen. Ook daar is heel wat te leren over reflectie op de aanpak, op het leren...).

Een aantal tips bij deze processen.

- Probleemoplosser wordt men niet vanzelfsprekend en zonder inspanning. *Je leert door ervaring*. Leerlingen zullen *geregeld problemen te verwerken krijgen*. Men zal in de beginfasen de denkstappen niet te groot maken. Een begeleide aanpak is wenselijk om demotivatie tegen te gaan. Het heeft dus geen zin van de leerlingen meten te confronteren met complexe problemen. Een leerlijn waarbij men uitgaat van beperkte haalbare opdrachten als toepassing binnen de gekende inhouden en die uitgroeit naar ruimere en meer open opdrachten is aangewezen.
- De leerlingen moeten in deze aanpak *de leraar* kunnen ervaren *als probleemoplosser*. Dat wil zeggen dat de leraar zijn denkstappen transparant maakt voor de leerlingen, met inbegrip van het gissen en missen, het uitproberen, het zoekend onder woorden brengen ...

- Het is zinvol leerlingen te confronteren met *meerdere oplossingen en oplossingswegen* van een probleem. Zeker bij open problemen is dat het geval. Als leerlingen aan elkaar hun oplossingsweg uitleggen, leren ze niet alleen de werkwijze van anderen waarderen, (zijn ze eventueel bereid af te stappen van hun oplossingweg), maar ook kritisch staan tegenover hun eigen oplossing en die van anderen kritisch bevragen. Dit is een belangrijke vaardigheid die hen later in de beroepspraktijk nog vele voordelen zal opleveren.
- In dit leerproces komen dus niet alleen inhoudelijke aspecten aan bod, maar ook het gebruik van vaardigheden en het toepassen van attitudes. Doorheen dergelijk proces kunnen ze heel wat aan vertrouwen winnen. *Succeservaring wekt vertrouwen* in het eigen kunnen. Wat krijgen op hun probleemaanpak en hun vaardigheid daarin zal hen motiveren om verdere problemen aan te pakken, en wellicht op een meer systematische wijze.
- Het voorgaande leidt dus tot een *reflectie op het oplossingsproces*, dat er in deze didactische leersituatie inherent mee verbonden moet zijn. Leerlingen leren stilstaan bij de eigen aanpak van het probleem, en welke elementen hierin op leerniveau kunnen opgenomen worden. In het leerproces ging het er dus niet alleen om dat ze een oplossing voor een probleem zouden vinden, maar ook, en wellicht vooral, dat ze inzicht verwerven in hun manier van aanpakken en van leren.

Voorbeelden van reflectieve vraagjes:

- Wat wilde ik precies bereiken?
- Hoe is het proces concreet verlopen? Hoe kijk ik zelf terug op het proces? Hoe was de reactie van anderen?
- Welke problemen deden zich effectief voor en hoe kan ik dit positief omschrijven?
- Welke oplossingen, alternatieven zijn er? Welke voordelen en nadelen zie ik al?
- Hoe stuur ik mijn kennis, mijn vaardigheden en attitudes, mijn leervaardigheden bij vanuit deze ervaring?

Uiteindelijk zullen de leerlingen zich deze vragen zelf moeten stellen, ook in hun latere werksituaties. Ze kunnen daar nu al mee geconfronteerd worden en het geleidelijk aan verwerven.

Dergelijke reflectie kan bij leerlingen leiden tot bijvoorbeeld

- het inzicht dat de beschikbare kennis beter of anders moet geordend worden,
- dat denkschema's opgesteld worden waardoor die kennis vlotter toegankelijk is,
- dat werkschema's worden gemaakt voor het gebruik van de bepaalde werkwijzen (vaardigheden),
- dat gemotiveerd gewerkt wordt aan een training van vaardigheden...

m.a.w. dat leerlingen gemotiveerd hun leren meer zelf in de hand nemen.

- Tenslotte is het belangrijk dat ze *feedback* krijgen over het proces. Dat houdt dus ondermeer in de feedback vanuit de bespreking van verschillende oplossingswijzen, het vergelijken van aanpakplannen, de terugkoppeling van anderen op hun oplossing, de eigen reflectiemomenten en ook de terugkoppeling van de leraar die het hele proces heeft geobserveerd.

Praktische aanpak

Enkele bedenkingen en tips.

- Het heeft geen zin dit onderwerp te beschouwen als een dat zonder hulp naar de leerlingen toe kan geschoven worden: "hier is een probleem, los op". Het gaat dus wel degelijk over een *leerproces*, waar ook de leraar intensief bij betrokken is. Een belangrijke rol daarbij is precies de planning van de aard en de omvang van de aangeboden problemen. Als leerlingen nog over weinig probleemoplossende vaardigheden beschikken is een *geleidelijk groeiende weg* aangewezen, vanuit haalbare toepassingen op een specifiek onderdeel naar meer open en complexere problemen die meer-

dere kenniselementen of vaardigheden mobiliseren. Een te grote kloof tussen wat leerlingen feitelijk aankunnen en het aangeboden probleem kan voor demotivatie zorgen. Succeservaring is al genoemd als generator van motivatie. In de keuze van het probleemaanbod ligt dus een belangrijke rol voor de leraar.

De leerplannen wiskunde voorzien al *van in het basisonderwijs en doorheen de eerste en tweede graad* het werken aan probleemoplossende vaardigheden. De realiteit gebiedt tot voorzichtigheid aan te zetten, omdat nog vaak veel aandacht besteed wordt aan de technische aspecten van wiskunde en minder aan deze belangrijke *kern van wiskundige vorming*. Dit heeft zijn effect op de mogelijkheden die momenteel aan bod kunnen komen bij 'mathematiseren'.

- De leerlingen moeten de *leraar* zeker kunnen ervaren *als probleemoplosser*. De leraar zal bij het onderwerp nog meer dan in de andere lessen aandacht besteden aan het transparant maken voor leerlingen van zijn denkwijzen en strategieën. Dat wil zeggen dat hij ook over de wijze van aanpakken, de door hem gebruikte heuristiek ... communiceert met de leerlingen. In de initiële fase zal het model van 'de leraar als oplosser' de beste ondersteuning bieden.
- Toch is het belangrijk dat steeds meer functies in het oplossingsproces door de leerlingen worden overgenomen. Ook hierbij is succeservaring voor de leerlingen belangrijk. Voor de leraar zal de leiding van het leerproces langzaam (maar zeker) begeleiding worden. Sturing van het leerproces zal eerder ondersteuning van het zoekproces worden.

Geleidelijk zal de sturende functie in het oplossingsproces aan de leerlingen zelf overgelaten worden. In die fase zal de leraar minder inhoudelijke vragen stellen, maar zich richten op 'proces'vragen, aanpakontwikkellende vragen.

- In de derde graad is het zeker de bedoeling, dat men bij de aanpak van dit onderwerp afwijkt van het aanbieden van streng geregelde oefeningen, waarvan de methode al bij voorbaat duidelijk is. (Denk aan het systeem aanbrenghmethode – inoefening, aanbrenghmethode – inoefening ... - Al langer pleit de begeleiding voor het doorbreken van deze 'routine' door geregelde herhalingsoefeningen, waarbij toch een aantal oefeningen voorkomen waarbij niet meteen duidelijk is waarvan ze een 'toepassing' zijn. -) In dit onderwerp moeten dus ook *open gestelde problemen* aan bod kunnen komen. Als leerlingen uitsluitend geconfronteerd worden met oefeningen waarvan relatief snel kan bepaald worden hoe ze op te lossen zijn, verwerven ze weinig of geen probleemoplossende vaardigheden. Ze worden dan goede navolgers maar geen probleem aanpakkers. Probleem oplossende vaardigheden verwerven betekent dus dat ze ook degelijke zoekopdrachten moeten doormaken.

Open problemen hoeven dan weer niet noodzakelijk synoniem te zijn van complexe situaties. Niet de ingewikkeldheid van het probleem is belangrijk, wel de wijze waarop met het probleem wordt omgegaan. En hoe op het oplossingsproces wordt teruggekeken. De leerdoelen gaan precies over het verwerven van dat proces. Dat proces transparant maken is belangrijker dan het oplossen van een topoefening.

- Het onderdeel *mathematiseren* wordt best niet in een geheel uitgewerkt. Het kan gespreid worden over verschillende momenten van het jaar.

Het heeft geen zin mathematiseren te verbinden met een gecondenseerde periode van drie of vier weken van 'problemen oplossen', net zo min als het zin heeft dit onderwerp te zien als het verder afwerken van de oefeningen van het voorbije hoofdstuk. Er moet dus ruimte gecreëerd worden voor *de eigenheid van de doelstellingen*. Ervaring opdoen heeft te maken met herhaling van de leerfasen.

Praktisch kan men bijvoorbeeld de mogelijkheid overwegen van het werken met een probleem van de week, van de maand ... Een beetje computerzoeken met 'probleem van de week' of 'problem of the week' (uiteraard gekoppeld aan wiskunde of mathematics) geeft heel wat mogelijkheden.

- *Waar problemen vinden?*
 - Het leerplan geeft een aantal denkpijlers aan:
 - In de praktijk kunnen allerlei situaties aanleiding zijn tot interessante probleemstellingen.
 - Problemen en toepassingen aangereikt binnen andere vakken.
 - Het ondersteunen van een wiskundig gedeelte van een project in de vrije ruimte.
 - Maatschappelijke problemen en situaties:
 - statistische informatie, enquêtes;
 - problemen en enquêtes binnen de schoolcontext;
 - maatschappelijke gedragingen (rijgedrag, rookgedrag, drugs, besteding inkomens, ...);
 - milieuproblematiek;
 - samenlevingsproblemen;
 - verkiezingen;
 - verwerking en kritische bevraging van informatie in televisie, kranten en tijdschriften.
 - Ook de leerinhouden die de leerlingen verwerken vanuit het leerplan bevatten allerlei situaties om deze methodiek van probleemaanpak in de praktijk te brengen.
 - Een aantal websites biedt heel wat mogelijkheden aan:
 - De Vlaamse Wiskunde Olympiade met USolve-IT: <http://www.kulak.ac.be/vwo/nl/>
 - de IMO voor buitenlandse inspiratie: <http://imo.math.ca/>,
 - Examenbundel: <http://www.examenbundel.nl>, zoek bij 'trainen' en 'wiskunde' (een uitsortering vind je in bijlage)
 - Op wiskundeweb: <http://www.wiskundeweb.nl/FrameProblem.html>
 - We verwijzen graag naar de verschillende websites van de diocesane begeleiding, o.a. <http://www.vsko/kogent/secundair/wiskunde/websites> waarbij onder de rubriek OE(feningen) nogal wat verwijzingen staan naar probleemoplossing.
 - Mogelijkheid te werken met een probleem van de week, van de maand
- Evaluatie
 - De evaluatie van deze leerprocessen vraagt een bespreking op zich. Alleszins zal meer aandacht moeten besteed worden aan de evaluatie van het leerproces zelf. Belangrijk is dat de leerling feedback krijgt over zijn werkaanpak. Het gebruik van checklists en observatieschema's is hier aangewezen (zie o.m. de nascholing van het schooljaar 2004-2005 – contacteer hiervoor eventueel de begeleiding).
 - De mogelijkheid van het werken met een portfolio van opgeloste problemen kan hier overwogen worden. Die zal uiteraard gekoppeld worden aan een 'bespreking' van het materiaal.

Bijlage 1 Voorbeelden uit examenbundel

Hierna volgen, gerangschikt per leerplan, een aantal 'modelopgaven' (als het ware een 'bloemlezing') van de site www.examenbundel.nl.

KSO/TSO leerplan c: ontleend aan HAVO-examens

1. Windenergie: B1,2 nieuwe stijl tijdvak 2, 2001
2. Weerstand: B1 nieuwe stijl tijdvak 1, 2001
3. Showmodel: B oude stijl tijdvak 1, 2001
4. Boekenkasten: A oude stijl tijdvak 2, 2001
5. Verwarming: A1,2 nieuwe stijl tijdvak 1, 2001
6. Sporttesten: A oude stijl tijdvak 1, 2001
7. Dominantie: A oude stijl tijdvak 2, 2002
8. Vliegen: A oude stijl tijdvak 2, 2002
9. De matrixcode: B1 tijdvak 2, 2004
10. Kamperen: A oude stijl tijdvak 1, 2003
11. Houd afstand!: A oude stijl tijdvak 1, 2003
12. Geheim genootschap voor Gezellige Dingen: A1,2 nieuwe stijl tijdvak 2, 2003
13. Remweg: A1,2 nieuwe stijl tijdvak 2, 2003
14. Sparen, sparen of sparen: A1,2 tijdvak 2, 2004

KSO/TSO leerplan b: ontleend aan HAVO-examens

1. Wereldrecords nattigheid: A oude stijl tijdvak 2, 2002: Grafisch onderzoek van functies, machten met rationale exponenten
2. Bacteriecultuur : B1 tijdvak 2, 2004: veeltermfuncties, rationale functie $f(x) = \frac{1}{x}$
3. Het loket: A1,2 nieuwe stijl tijdvak 2, 2002: Rationale functies
4. Pompen of ...: B1 nieuwe stijl tijdvak 2, 2002: Veeltermfuncties
5. Bevolkingsgroei: B1 nieuwe stijl tijdvak 2, 2001: Exponentiële en logaritmische functies
6. Medicijnen: B1,2 nieuwe stijl tijdvak 1, 2003: Exponentiële functies
7. De mathematische slinger: B oude stijl tijdvak 1, 2003: Goniometrische functies A+B
8. Hartfrequentie: B1,2 nieuwe stijl tijdvak 2, 2003: Veeltermfuncties en Rationale functies
9. Doosjes verzenden: A1,2 nieuwe stijl tijdvak 2, 2003: Veeltermfuncties
10. Trein: B1,2 tijdvak 1, 2004: Goniometrische functies A

KSO/TSO leerplan a: ontleend aan HAVO examens

1. Epo: A1,2 nieuwe stijl tijdvak 1, 2002: Statistiek
2. Valse start: A oude stijl tijdvak 1, 2003: Statistiek
3. Geheim genootschap voor gezellige dingen: A1,2 nieuwe stijl tijdvak 2, 2003: Telproblemen en kansrekenen
4. Bloedgroepen en resusfactor: A oude stijl tijdvak 2, 2001: Telproblemen en kansrekenen
5. Een piramide en een kubus: B oude stijl tijdvak 2, 2002: Ruimte meetkunde

KSO/TSO leerplan a: ontleend aan VWO examens

1. Geneesmiddelenonderzoek: B1 nieuwe stijl tijdvak 1, 2001: numerieke methoden, bepaalde integraal, normale verdeling
2. Verleiding: A oude stijl tijdvak 1, 2001: Matrices
3. Energiebronnen: A1,2 nieuwe stijl tijdvak 1, 2002: Reële functies, afgeleiden
4. Bal te water: B1,2 nieuwe stijl tijdvak 1, 2002: Reële functies, bepaalde integraal
5. Periodiek: B1,2 nieuwe stijl tijdvak 1, 2003: Rijen en iteratie

6. Zomertarwe: B1,2 nieuwe stijl tijdvak 1, 2003: Groeifuncties, bepaalde integraal
7. Kogelbanen: B1 nieuwe stijl tijdvak 1, 2003: Veeltermfuncties, rationale functies, afgeleiden
8. Parameterkrommen – Kubus en piramide: B oude stijl tijdvak 1, 2004: Krommen, inhoud omwentelingslichaam – Ruimtemeetkunde

ASO leerplan b-c: ontleend aan HAVO-examens

1. Wereldrecords nattigheid: A oude stijl tijdvak 2, 2002: Grafisch onderzoek van functies, machten met rationale exponenten
2. Bacteriecultuur: B1 tijdvak 2, 2004: Veeltermfuncties, rationale functie $f(x) = \frac{1}{x}$
3. Het loket: A1,2 nieuwe stijl tijdvak 2, 2002: Rationale functies
4. Pompen of ...: B1 nieuwe stijl tijdvak 2, 2002: Veeltermfuncties
5. Koord: B1,2 nieuwe stijl tijdvak 2, 2001: Kettinglijn-parabool
6. Medicijnen: B1,2 nieuwe stijl tijdvak 1, 2003: Exponentiële functies
7. Epo: A1,2 nieuwe stijl tijdvak 1, 2002: Statistiek
8. Valse start: A oude stijl tijdvak 1, 2003: Statistiek
9. Geheim genootschap voor gezellige dingen: A1,2 nieuwe stijl tijdvak 2, 2003: Telproblemen en kansrekenen
10. Bloedgroepen en resusfactor: A oude stijl tijdvak 2, 2001: Telproblemen en kansrekenen
11. Sparen, sparen of sparen: A1,2 tijdvak 2, 2004: Financiële Algebra
12. Dominantie: A oude stijl tijdvak 2, 2002: Matrices
13. Een piramide en een kubus: B oude stijl tijdvak 2, 2002: Ruimtemeetkunde

ASO leerplan a: ontleend aan VWO-examens

1. Geneesmiddelenonderzoek: B1 nieuwe stijl tijdvak 1, 2001: numerieke methoden, bepaalde integraal, normale verdeling
2. Wereldbevolking: B1 nieuwe stijl tijdvak 2, 2001: begrip kans, begrip afgeleide, normale verdeling
3. Verleiding: A oude stijl tijdvak 1, 2001: Matrices
4. Energiebronnen: A1,2 nieuwe stijl tijdvak 1, 2002: Reële functies, afgeleiden
5. Uit de kust: B1,2 nieuwe stijl tijdvak 1, 2002: Reële functies, oppervlakteberekening
6. Periodiek: B1,2 nieuwe stijl tijdvak 1, 2003: Rijen en iteratie
7. Zomertarwe: B1,2 nieuwe stijl tijdvak 1, 2003: Groeifuncties, bepaalde integraal
8. Opgave 1 + 2: B oude stijl tijdvak 2, 2002: Rationale functies, afgeleiden, oppervlakteberekening, parameterkrommen, inhoud omwentelingslichaam
9. Parameterkrommen – Kubus en piramide: B oude stijl tijdvak 1, 2004: Parameterkrommen, inhoud omwentelingslichaam – Ruimtemeetkunde

Bijlage 2 Heuristiek

Twee teksten ter verklaring van "heuristiek", gedownload van de aangegeven websites.

1. Op <http://en.wikipedia.org/wiki/Heuristic>

Heuristic is the art and science of discovery and invention. The word comes from the same Greek root as "[eureka](#)": εὕρισκω, which means "I find". A heuristic is a way of directing your attention fruitfully. The term was introduced by [Pappus of Alexandria](#) in the [4th century](#).

Heuristic is the art and science of discovery and invention. The word comes from the same Greek root as "[eureka](#)": εὕρισκω, which means "I find". A heuristic is a way of directing your attention fruitfully. The term was introduced by [Pappus of Alexandria](#) in the [4th century](#).

The mathematician [George Polya](#) popularized heuristic in the [twentieth century](#) in his book [How to Solve It](#). He learned mathematical [proofs](#) as a student, but didn't know how mathematicians think of proofs, nor was this taught. *How to Solve It* is a collection of ideas about heuristics that he taught to math students: ways of looking at problems and casting about for solutions.

Some commonplace heuristics, all from [How to Solve It](#):

- If you are having difficulty understanding a problem, try drawing a picture.
- If you can't find a solution, try assuming that you have a solution and seeing what you can derive from that ("working backward").
- If the problem is abstract, try examining a concrete example.
- Try solving a more general problem first (the "inventor's paradox": the more ambitious plan may have more chances of success).

2. Op <http://www.arbelos.org/ProblemSolving.html>

The *heuristics* of problem solving are the strategies or tactics used in solving problems. These techniques are general guidelines that are useful in solving a wide range of problems.

A list of heuristics:

1. Search for a [pattern](#).
2. [Draw a figure](#).
3. Formulate an [equivalent problem](#).
4. [Modify the problem](#).
5. Choose effective [notation](#).
6. Exploit [symmetry](#).
7. [Divide](#) into cases.
8. [Work backwards](#).
9. Argue by [contradiction](#).
10. Check for [parity](#).
11. Consider [extreme cases](#).
12. [Generalize](#).

Zie ook de voorbeelden op deze website.