
Lineair programmeren in de Derde graad D-finaliteit (Leerplan III-WiCo-d)

2026-01-01

Lineair programmeren: van theorie naar klaspraktijk

1 Inleiding

Lineair programmeren is niet alleen een wiskundige techniek, het is een krachtige manier om leerlingen te laten ervaren hoe wiskunde echte beslissingen beïnvloedt. Hoeveel producten moet een bedrijf maken om winst te maximaliseren? Hoe verdeel je beperkt beschikbare middelen optimaal? Dit soort vragen maakt wiskunde tastbaar en relevant.

Het onderwerp komt in tal van contexten voor: van productieplanning en transport tot budgetbeheer. Het staat in het complementaire leerplan wiskunde III-WiCo-d als inspirerende keuze voor complementaire uren wiskunde in de richtingen Economie-Wiskunde, Grieks-Wiskunde, Latijn-Wiskunde, Technologische wetenschappen en Wetenschappen-Wiskunde van de derde graad D-finaliteit. Het bouwt verder op inhouden uit de tweede graad (eerstegraadsfuncties en eerstegraadsongelijkheden) en versterkt inzichten in grafische voorstellingen.

Dit artikel toont hoe je de leerplandoelen rond lineair programmeren kan realiseren, rekening houdend met de pedagogisch-didactische wenken. We werken een voorbeeld uit waarin alle stappen van het proces aan bod komen: van het opstellen van de doelfunctie en beperkingen tot het uitvoeren van een sensitiviteitsanalyse en het berekenen van schaduw prijzen.

2 Leerplandoelen

In het leerplan III-WiCo-d staan volgende doelstellingen over Lineair programmeren:

- LPD 36 – De leerlingen lossen ongelijkheden en stelsels van ongelijkheden van de eerste graad met twee onbekenden op en stellen de oplossing grafisch voor.
- LPD 37 – De leerlingen lossen lineaire programmeringsproblemen met twee variabelen grafisch op.
- LPD 38 – De leerlingen lossen lineaire programmeringsproblemen op met ICT.
- LPD 39 – De leerlingen analyseren de impact van wijzigingen in de parameters van een lineair programmeringsprobleem met twee variabelen en interpreteren de gevoeligheid van de oplossing met behulp van sensitiviteitsanalyse.



3 Didactische wenken

Start bij het aanleren van lineair programmeren altijd vanuit herkenbare contexten zoals productieplanning, budgetbeheer of logistiek. Dit maakt duidelijk waarom deze techniek relevant is en verhoogt de motivatie van leerlingen. Gebruik visuele hulpmiddelen: toon hoe een eerstegraadsongelijkheid een halfvlak bepaalt en maak dit zichtbaar met kleur of arcering. Het grafisch voorstellen van het toegestane gebied helpt leerlingen om het probleem concreet te zien.

Werk stapsgewijs en expliciet:

- 1) Laat leerlingen eerst de doelfunctie opstellen (bv. maximale winst of minimale kost).
- 2) Formuleer de beperkingen als ongelijkheden.
- 3) Teken het toegestane gebied en bespreek wat dit betekent.
- 4) Zoek het optimum en interpreteer het resultaat in de context.

ICT is een sterke troef, zeker bij problemen met meer dan twee variabelen. Denk aan GeoGebra of Excel om het proces te automatiseren en te visualiseren.

Ga verder dan het vinden van een oplossing: laat leerlingen onderzoeken wat er gebeurt als parameters veranderen. Sensitiviteitsanalyse is hierbij een krachtig instrument. Bespreek bijvoorbeeld:

- Binnen welke marges kunnen coëfficiënten van de doelfunctie variëren zonder dat het punt waarin het optimum bereikt wordt, verandert?
- Hoe beïnvloeden wijzigingen de waarde van de doelfunctie?
- Introduceer het begrip schaduwprijs: hoeveel extra winst levert één extra eenheid van een beperkende grondstof op? Dit maakt de link naar realistische beslissingen in economie en techniek.

Door deze aanpak leren leerlingen niet alleen een probleem oplossen, maar ook kritisch nadenken over de gevolgen van keuzes en veranderingen. Zo krijgt lineair programmeren betekenis en diepgang.

4 Kernbegrippen

- **Doelfunctie:** een lineaire functie die geoptimaliseerd moet worden (maximalisatie of minimalisatie).
- **Beperkingen:** ongelijkheden die de grenzen van het probleem aangeven.
- **Toegestane gebied:** de verzameling van alle punten die aan de beperkingen voldoen.
- **Optimum** of optimale waarde: de maximale of minimale waarde die doelfunctie kan aannemen binnen het toegestane gebied
- **Isolijnen:** lijnen van gelijke waarde van de doelfunctie, gebruikt om het optimum te bepalen.
- **Sensitiviteitsanalyse:** onderzoek naar de invloed van parameterwijzigingen op de optimale oplossing.
- **Schaduwprijs:** de verandering in de waarde van de doelfunctie bij een wijziging van één eenheid in het rechterlid van een beperkende voorwaarde.



5 Lineair programmeren: van context tot klaspraktijk

5.1 De contextopgave

Een bedrijf produceert twee producten, A en B. Voor elk verkocht product A bedraagt de winst €40, terwijl product B per verkochte eenheid €30 winst oplevert. Het bedrijf beschikt over maximaal 100 uur arbeid en 180 kg grondstof. Product A vraagt per eenheid 2 uur arbeid en 3 kg grondstof, terwijl product B per eenheid 1 uur arbeid en 6 kg grondstof nodig heeft.

Hoeveel eenheden van A en B moet het bedrijf produceren om de totale winst te maximaliseren, rekening houdend met deze beperkingen?

We gaan er bij deze opdracht vanuit dat elke geproduceerde eenheid ook verkocht wordt.

5.2 Uitwerking

Stap 1: opstellen van de doelfunctie

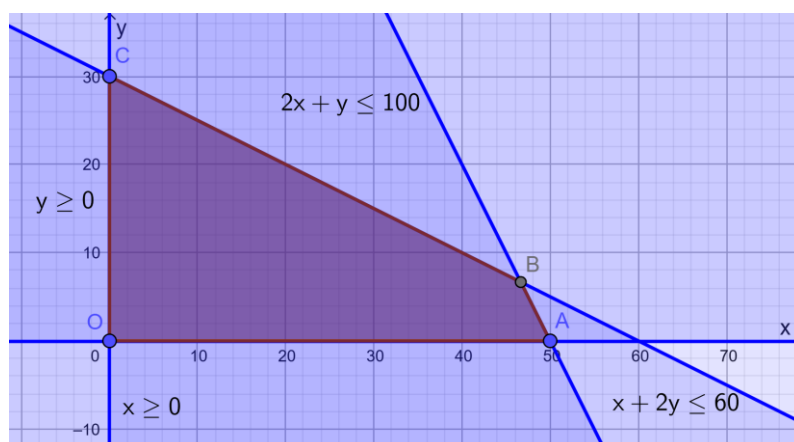
- Variabelen
 - x = aantal eenheden van product A
 - y = aantal eenheden van product B
- Doelfunctie
 - $W = 40x + 30y$

Stap 2: opstellen van de ongelijkheden horend bij de beperkingen

$$\begin{cases} 2x + y \leq 100 & (\text{arbeid}) \\ 3x + 6y \leq 180 & (\text{grondstof}) \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \quad \text{of} \quad \begin{cases} 2x + y \leq 100 & (\text{arbeid}) \\ x + 2y \leq 60 & (\text{grondstof}) \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Stap 3: grafisch voorstellen van het stelsel van ongelijkheden

Met GeoGebra kunnen we het toegestane gebied grafisch voorstellen. De vierhoek OABC stelt dit gebied voor, waarbij het punt B(140/3, 20/3) het snijpunt is van de rechten met vergelijking $2x + y = 100$ en $x + 2y = 60$.



Met de coördinaten van elk punt van dit toegestane gebied kunnen we de winst berekenen. Deze coördinaten stellen het bijhorende aantal te produceren eenheden van product A en B voor.



Stap 4: bepalen van het optimum en interpreteren van het resultaat

De maximale winst wordt in één van de hoekpunten van de vierhoek OABC bereikt. Door in deze vier hoekpunten de bijhorende winst te berekenen, vinden we de maximale winst (= het optimum). Deze maximale winst is €2066,67 en wordt in het punt B bereikt.

$$W_B = 40 \cdot \frac{140}{3} + 30 \cdot \frac{20}{3} \approx 2066,67$$

De bekomen waarden voor x en y zijn 46,67 en 6,67. Gezien de context kunnen x en y enkel natuurlijke getallen zijn, ze stellen immers het aantal geproduceerde eenheden van product A en B voor. We ronden deze aantallen af naar 47 en 7.

Door beide waarden wiskundig af te ronden (beide naar boven) zal er in deze context niet meer voldoen zijn aan één of meerdere beperkingen. We moeten dus eigenlijk minstens 1 van de variabelen naar beneden afronden. We onderzoeken dit verder.

Voor de onderstaande gevallen kun je eenvoudig nagaan dat de x- en y-waarden wel aan de beperkingen (het stelsel van ongelijkheden) voldoen. We berekenen in elk van de gevallen de bijhorende winst.

$$x = 46 \text{ en } y = 6 : W = 40 \cdot 46 + 30 \cdot 6 = 2020$$

$$x = 46 \text{ en } y = 7 : W = 40 \cdot 46 + 30 \cdot 7 = 2050$$

$$x = 47 \text{ en } y = 6 : W = 40 \cdot 47 + 30 \cdot 6 = 2060$$

We bekomen dus een maximale winst van €2060 bij een productie van 47 eenheden van product A en 6 eenheden van product B.

Let op bij afronden: afronden lijkt eenvoudig, maar het geeft niet altijd de beste oplossing. Soms is er een andere combinatie van gehele waarden die meer winst oplevert. Het exact bepalen van die optimale integer-oplossing vraagt technieken die voor onze doelgroep te ver gaan, maar het is zinvol om leerlingen hiervan bewust te maken.

Voor het vervolg van dit artikel rekenen we verder met de theoretische (niet afgeronde) waarden voor x en y waarbij we een maximale winst van €2066,67 bekomen.

Om te begrijpen waarom het optimum in een hoekpunt bereikt wordt, bekijken we de isolijnen van de doelfunctie.

Waarom wordt het optimum altijd in een hoekpunt bereikt?

In stap 3 stellen we dat de maximale winst zich in één van de hoekpunten van de vierhoek voordoet. We kunnen dit grafisch eenvoudig aantonen.

Alle punten van het toegestane gebied die corresponderen met bijvoorbeeld een winst van €500 liggen op de rechte a met vergelijking $40x + 30y = 500$. Dit is de isolijn horend bij een winst van €500. Als de winst €1200 is, zullen de bijhorende punten op de rechte b met vergelijking $40x + 30y = 1200$ liggen. De rechte b is evenwijdig met a, maar ligt iets 'hoger'. De constante term (= de winst) van de vergelijking b is immers groter dan die bij de vergelijking van de rechte a.



Het zoeken van de maximale winst komt dus neer op het zoeken van de 'hoogste' rechte evenwijdig met a die nog minstens één punt met de vierhoek gemeen heeft. Deze 'hoogste' evenwijdige aan a is hier de rechte c en gaat door het punt B. Met de coördinaten van B kunnen we de maximale winst berekenen.



In realistische situaties blijven parameters zelden constant. Daarom bekijken we nu hoe het optimum mee verandert wanneer de omstandigheden wijzigen.

5.3 Sensitiviteitsanalyse

We gaan bij onze contextopgave na wat de impact van wijzigingen van de parameters van het lineair programmeringsprobleem is. Hiervoor beantwoorden we volgende vragen.

- 1) Hoe verandert de optimale winst als de beschikbare arbeid met 10 uur toeneemt?
- 2) Wat is de schaduwprijs van de arbeidsbeperking?
- 3) Hoe verandert de optimale winst als de winst per eenheid van product B naar €35 stijgt?

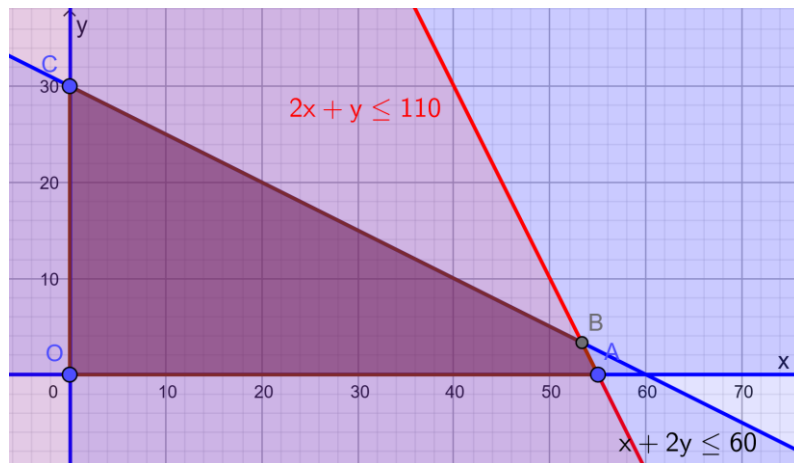
Vraag 1: Hoe verandert de optimale winst als de beschikbare arbeid met 10 uur toeneemt?

Bij deze vraag verandert er één van de beperkingen, namelijk deze van de arbeid. We bekomen volgend stelsel van ongelijkheden:

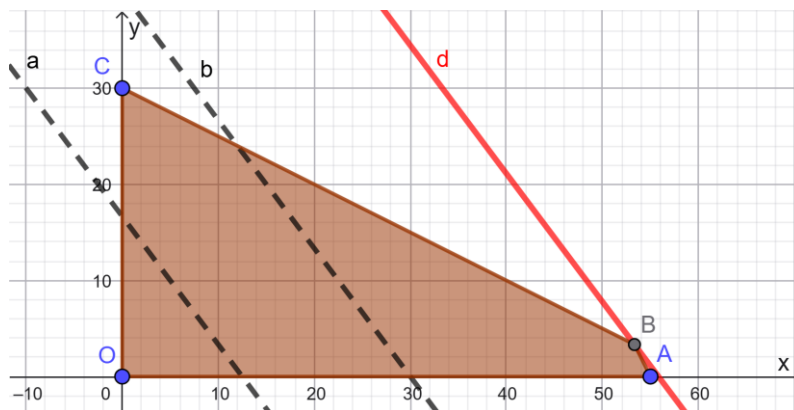
$$\begin{cases} 2x + y \leq 110 & \text{(arbeid)} \\ x + 2y \leq 60 & \text{(grondstof)} \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

We stellen het nieuwe toegelaten gebied grafisch voor:





De doelfunctie is niet veranderd. De 'hoogste' evenwijdige aan de rechte a is nu de rechte d. Deze rechte bevat het punt B(160/3, 10/3).



De maximale winst wordt dus opnieuw bepaald door de coördinaten van het punt B. De maximale winst is nu €2233,33. Dit is een stijging van €166,67.

Vraag 2: Wat is de schaduwprijs van de arbeidsbeperking?

Er wordt gevraagd naar de toename van de maximale winst als de beschikbare arbeid met 1 uur stijgt, m.a.w. als de beschikbare arbeid van 100 naar 101 uur stijgt. We bekomen analoog als in vraag 1 een maximale winst van €2083,33. Dit is een toename van €16,67.

De schaduwprijs van de arbeidsbeperking is €16,67.

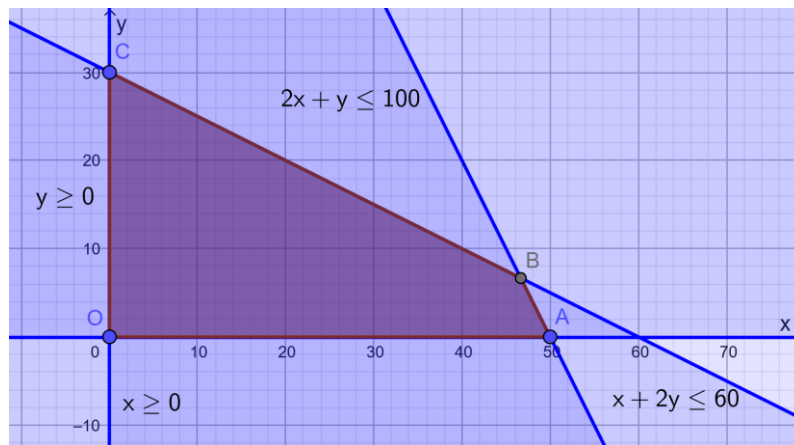
Vraag 3: Hoe verandert de optimale winst als de winst per eenheid van product B naar €35 stijgt?

Bij deze vraag verandert de doelfunctie, de coëfficiënt van y wordt 35:

$$W = 40x + 35y$$

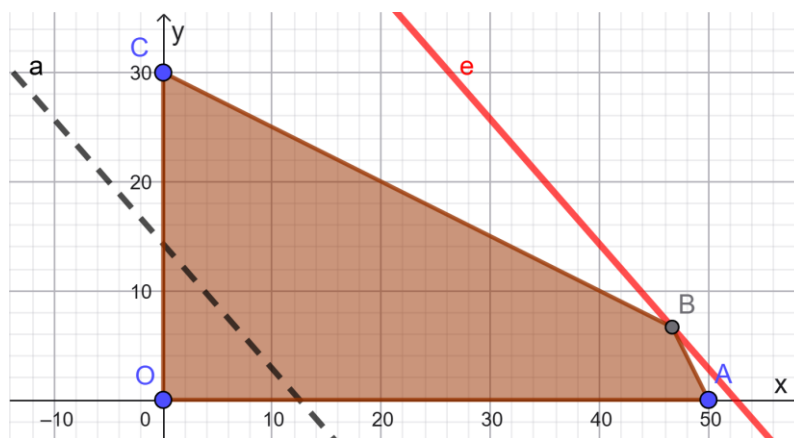
De beperkingen veranderen niet, waardoor het toegestane gebied gelijk blijft.





Alle punten van het toegestane gebied die corresponderen met bijvoorbeeld een winst van €500 liggen op de rechte a met vergelijking $40x + 35y = 500$. De coëfficiënt van y is t.o.v. het oorspronkelijke probleem van 30 naar 35 veranderd. T.o.v. de oorspronkelijke opgave verandert de helling van de isolijnen.

De 'hoogste' evenwijdige aan de rechte a is nu de rechte e. Deze rechte bevat opnieuw het punt B(160/3, 10/3).



De maximale winst is nu €2100, wat een toename is van €33,33.

Je kan met de leerlingen nu ook onderzoeken in welke mate de coëfficiënten van x en y, m.a.w. de winst per eenheid van product A en B, mogen wijzigen opdat de 'hoogste' evenwijdige nog steeds door het punt B gaat. Grafisch kan je aantonen dat de richtingscoëfficiënt $-a/b$ van de rechte met vergelijking $w = a.x + b.y$ (= de richtingscoëfficiënt van de isolijnen) tussen de richtingscoëfficiënten van de rechten AB en BC moet liggen of gelijk moet zijn aan de richtingscoëfficiënt van één van deze rechten.

De handmatige aanpak maakt het principe duidelijk. Maar in de klaspraktijk is ICT bijzonder waardevol om het optimalisatieproces te versnellen en de sensitiviteitsanalyse automatisch te laten uitvoeren. Excel bevat hiervoor een ingebouwde tool.



6 Optimalisatie en Sensitiviteitsanalyse met Excel

Voor het oplossen van een lineair programmeringsprobleem en het uitvoeren van een sensitiviteitsanalyse kan Excel gebruikt worden.

Hiervoor maak je gebruik van de '**Oplosser**' (**Solver**) invoegtoepassing. Deze toepassing vind je op het tabblad **Gegevens**. Het kan zijn dat je de optie 'Oplosser' nog eerst moet activeren vooraleer deze beschikbaar is.

1) Activeer de 'Oplosser' (Solver) invoegtoepassing:

- Ga naar **Bestand > Opties > Invoegtoepassingen**.
- Selecteer **Excel-invoegtoepassingen** in het vak **Beheren** en klik op **Start**.
- Schakel het selectievakje voor **Oplosser-invoegtoepassing** in en klik op **OK**.
- De Oplosser is nu beschikbaar onder het tabblad **Gegevens** in de sectie **Analyseren** (helemaal rechts).

2) Stel uw optimalisatieprobleem in het werkblad in:

- Definieer uw **doelfunctie** (bijvoorbeeld totale winst of kosten).
- Specificeer de **variabele cellen** (de beslissingsvariabelen die Excel mag aanpassen).
- Voer de **beperkingen** (constraints) in die van toepassing zijn op uw variabelen (bijvoorbeeld maximale productiecapaciteit of beschikbare middelen).

3) Gebruik de 'Oplosser' om het probleem op te lossen:

- Klik op **Oplosser** in het tabblad **Gegevens**.
- Stel de parameters in:
 - **Doel instellen:** Selecteer de cel van uw doelfunctie.
 - **Naar:** Kies **Max** (maximaliseren), **Min** (minimaliseren) of **Waarde van** (een specifieke waarde bereiken).
 - **Variabele cellen wijzigen:** Selecteer de variabele cellen.
 - **Onderhevig aan de beperkingen:** Voeg uw beperkingen toe.
- Zorg ervoor dat u een geschikte oplossingsmethode selecteert (meestal is **GRG Nonlinear** of **Simplex LP** geschikt voor lineaire problemen).
- Klik op **Oplossen**.

4) Genereer het gevoeligheidsrapport:

- Nadat de Oplosser een oplossing heeft gevonden, verschijnt er een pop-upvenster.
- Selecteer **Gevoeligheid** in de sectie **Rapporten** voordat u op **OK** klikt.
- Er wordt een nieuw werkblad met de naam 'Gevoeligheidsrapport 1' gemaakt.

5) Lees de schaduwprijs af:

- Open het **Gevoeligheidsrapport**.
- Zoek de sectie met de **Beperkingen** (Constraints).
- In de tabel vindt u een kolom met de titel **Schaduwprijs** (Shadow Price).
- De waarde in deze kolom naast een specifieke beperking is de schaduwprijs voor die beperking.



In het Excelbestand [Gebruik van Solver bij Lineair Programmeren](#) vind je de uitgewerkte toepassing uit dit artikel terug, inclusief de sensitiviteitsanalyse. Dit bestand kan als basis dienen om nog andere lineaire programmeringsproblemen met Excel op te lossen.

Hieronder vind je extra duiding bij dit bestand. We tonen stap voor stap hoe je hiermee de toepassing uit dit artikel kan oplossen.

Werkblad Optimalisatie

	A	B	C	D	E
1		Product A	Product B		
2		x	y		
3	Aantal geproduceerde eenheden	47	7		
4					
5	Wint per eenheid	€40,00	€30,00		
6					
7				totaal aantal uren arbeid	beschikbare aantal uren arbeid
8	Aantal uur arbeid per eenheid	2	1	100	100
9				gebruikte hoeveelheid grondstof	beschikbare hoeveelheid grondstof
10	Aantal kg grondstof per eenheid	3	6	180	180
11					
12	Totale winst	€2.066,67			

- In B3 en C3 (geel) kun je zelf waarden ingeven. Voor deze x- en y-waarden wordt dan het totaal aantal uren arbeid (D8) en de gebruikte hoeveelheid grondstof (D10) berekend. De winst vind je in cel BC12 terug.
- Met de toepassing **Oplosser** lossen we het lineair programmeringsprobleem op. Klik hiervoor op **Oplosser** in het tabblad **Gegevens**. We krijgen volgend scherm:

Parameters van Oplosser

Doelfunctie bepalen:
Totale_winst

Naar:
☒ Max
☐ Min
☐ Waarde van: 0

Door veranderen van variabelecellen:
aantal_geproduceerde_eenheden

Onderworpen aan de randvoorwaarden:
gebruikte_hoeveelheid_grondstof <= beschikbare_hoeveelheid_grondstof
totaal_aantal_uren_arbeid <= beschikbare_aantal_uren_arbeid

☒ Variabelen zonder randvoorwaarden niet-negatief maken

Selecteer oplossingsmethode:
Simplex LP

Oplossingsmethode
Selecteer de GRG Nonlinear-engine voor Oplosser-problemen die glad niet-lineair zijn. Selecteer de LP Simplex-engine voor lineaire Oplosser-problemen en selecteer de Evolutionary-engine voor Oplosser-problemen die niet glad zijn.

Help
Oplossen
Sluiten



- Doelfunctie bepalen: Totale_winst (= cel BC12)
- Naar: Max
- Door veranderen van variabelecellen: aantal_geproduceerde_eenheden (= cel B3 en C3)
- Onderworpen aan de randvoorwaarden: de beperkingen voor arbeid en grondstof.
- Variabelen zonder randvoorwaarden niet-negatief maken: hierdoor zijn de x- en y-waarde steeds positief.
- Selecteer oplossingsmethode: Simplex LP
- De optimalisatie wordt uitgevoerd door Oplossen te kiezen. We krijgen volgend pop-upvenster.

- Wil je ook een sensitiviteitsanalyse doorvoeren, duid dan bij Rapporten Gevoeligheid aan en klik op OK.
- Nu verschijnt de maximale winst in cel BC12, de bijhorende x- en y-waarde staan in de cellen B3 en C3. De resultaten van de sensitiviteitsanalyse vind je in het werkblad Gevoeligheidsrapport 1.

Werkblad Gevoeligheidsrapport 1

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Microsoft Excel 16.0 Gevoeligheidsrapport							
2	Werkblad: [Use of Excel Solver_poging2.xlsx]Optimalisatie							
3	Rapport gemaakt: 2/12/2025 12:11:22							
4								
5								
6	Variabelecellen							
7			Eind	Gereduceerde	Doelfunctie	Toegestane	Toegestane	
8	Cel	Naam	Waarde	Kosten	Coëfficiënt	Toename	Afname	
9	\$B\$3	Aantal geproduceerde eenheden x	46,66666667	0	40	20	25	
10	\$C\$3	Aantal geproduceerde eenheden y	6,666666667	0	30	50	10	
11								
12	Randvoorwaarden							
13			Eind	Schaduw	Randvoorwaarde	Toegestane	Toegestane	
14	Cel	Naam	Waarde	Prijs	Rechterzijde	Toename	Afname	
15	\$D\$10	gebruikte_hoeveelheid_grondstof	180	2,222222222	180	420	30	
16	\$D\$8	totaal_aantal_uren_arbeid	100	16,66666667	100	20	70	



- De schaduw prijzen staan in de cellen E15 en E16.
- In de cellen G9 en H9 vind je toegestane toename en afname van de coëfficiënt van x (= winst per eenheid van product A) in de doelfunctie opdat het optimum nog steeds in het punt B bereikt wordt.
- In de cellen G10 en H10 vind je dezelfde informatie voor de coëfficiënt van y (= winst per eenheid van product B) in de doelfunctie.

Met deze context en werkwijze kan je leerlingen niet alleen het basisprincipe van lineair programmeren laten ontdekken, maar ook tonen hoe ze oplossingen kritisch kunnen evalueren. We vatten de aanpak nog even samen.

7 Samenvatting

Deze context is ideaal om leerlingen stap voor stap door het proces van lineair programmeren te leiden. Start met het bespreken van de situatie en laat leerlingen zelf de **doelfunctie** formuleren (maximaliseer de winst) en de **beperkingen** opstellen op basis van arbeid en grondstoffen. Visualiseer het probleem door het toegestane gebied in het vlak te tekenen en bespreek wat dit betekent. Laat leerlingen het optimum grafisch bepalen en daarna met ICT controleren, bijvoorbeeld via GeoGebra of een spreadsheet.

Ga verder dan het vinden van een oplossing: gebruik deze context om het belang van **sensitiviteitsanalyse** te tonen. Vraag leerlingen wat er gebeurt als de beschikbare arbeid toeneemt of als de winst van product B stijgt. Introduceer het begrip **schaduwprijs** en bespreek hoe dit inzicht geeft in economische beslissingen. Zo leren leerlingen niet alleen rekenen, maar ook interpreteren en kritisch nadenken over de gevolgen van veranderingen.

